François Weiss

PROMENADES EN MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

François Weiss

13 mai 2026

PROMENADES EN MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

François Weiss

Aux auditeurs du Conservatoire

SOMMAIRE

1. Premiers pas 1
1.1. Le découvert bancaire 1
1.2. Le taux annuel effectif global 4
1.3. La nécessité d'un moteur de résolution 6
1.4. Le moteur 7
1.5. Taux proportionnels, taux équivalents 8
1.6. Passage du taux nominal au taux effectif 9
1.7. L'annuité 9

2. Exploration des emprunts 11
2.1. Les exemples de l'annexe III de la directive 98/7/CE 11
2.2. Les autres exemples de la règlementation française 12
2.3. Amortissement des emprunts 16
2.4. TAEG d'un découvert bancaire 17
2.5. Plafonnement des TAEG par les taux de l'usure 19

3. Étude des obligations 21
3.1. Caractéristiques des obligations 21
3.2. Le cours en pied de coupon 21
3.3. Amortissement de la surcote, étalement de la décote 22
3.4. Taux de rendement actuariel d'une obligation 24
3.5. Équivalence entre le prix d'une obligation et son taux de rendement actuariel 25
3.6. Analyse du prix d'une obligation par ses composantes 25
3.7. Construction de la courbe des zéros-coupons 29
3.8. Taux *forward* implicites 30
3.9. Comparaison des taux *spot* et des taux *forward* 34

4. À la découverte de nouveaux horizons 35
4.1. Fonctionnement d'un marché à terme 35

4.2. Le contrat à terme sur l'obligation 10 ans de la République fédérale d'Allemagne 35
4.3. Étude d'un exemple 36
4.4. Options sur un arbre binaire 37
4.5. L'évaluation des flux au bilan prudentiel d'un assureur 40
4.6. Comparaison de zéro-coupons de même échéance 42
4.7. Les scénarios à la hausse et la baisse des taux d'EIOPA 44
4.8. Le capital de solvabilité requis pour le risque de taux 49

5. Échauffements 51
5.1. Emprunt Socram 51
5.2. OAT *versus* OATi 52
5.3. Couverture d'un régime de retraite 52
5.4. Comparaison d'emprunts de même durée 53
5.5. Duration d'une obligation 55

6. Vagabondages 59
6.1. Investissement locatif 59
6.2. Option de remboursement d'un prêt en devises 60
6.3. Étude d'un prêt à la consommation 62
6.4. Deux obligations de même coupon 63
6.5. Un montage financier 64
6.6. Intérêts inframensuels 66
6.7. Défaillance d'un État 69
6.8. Emprunt à deux composantes 71
6.9. Contrat à terme 73
6.10. Opération de crédit différé 74
6.11. Dénouement d'une opération immobilière 75
6.12. Risque de défaillance d'un emprunteur 77
6.13. Un cas réel 80
6.14. Étude d'un portefeuille de prêts 83

Appendice 87

La formule de Black and Scholes 89
Le modèle Cox-Ross-Rubinstein 89
Construction du portefeuille de couverture 89
Probabilité risque neutre et formule fondamentale 91
Passage à la limite, formule de Black-Scholes 93
Limite du prix Cox, Ross et Rubinstein 94

CHAPITRE 1

PREMIERS PAS

1.1. Le découvert bancaire

Regardons les modalités qui gouvernent le découvert bancaire.

Ces modalités découlent de la convention de compte qui lie le particulier à la banque et de conditions tarifaires. Ces conditions tarifaires sont elles-mêmes fixées dans les conditions particulières qui lient le particulier à la banque et/ou dans les conditions applicables aux opérations bancaires des particuliers, ces conditions étant régulièrement mises à jour par les banques.

Ainsi, les tarifs de HSBC au 1er juillet 2016 prévoient les frais suivants :
– une commission minimum forfaitaire d'utilisation de 5 € par mois ;
– chaque mois, une commission de plus fort découvert égale à 0,05 % ;
– l'application d'un taux nominal annuel de :
  – TB + 2,8 % à 8,0 % pour les découverts autorisés,
  – TB + 7,0 % à 9,5 % pour les facilités de caisse,
  – TB + 9,5 % pour les découverts non autorisés.

Le découvert est dit non autorisé lorsqu'il dépasse le montant convenu entre les parties. Le découvert autorisé est un crédit que le client peut mobiliser si nécessaire. Une facilité de caisse n'est pas un crédit ; le compte peut être débiteur en-deçà d'un montant convenu et pour une durée d'excédant pas 15 jours, au-delà la banque est tenue de faire une offre de prêt.

L'offre de prêt fait l'objet lors de sa mise en place de frais de dossier. Lorsque la facilité de caisse fait partie des services d'une convention de compte, elle est exonérée de commission forfaitaire d'utilisation et bénéficie d'une franchise d'agios trimestrielle.

Le « taux annuel nominal » est égal au « TB », le taux de base de HSBC, augmenté d'un taux. Chaque banque a son propre taux de base. Ce taux permet d'établir le taux applicable à certains crédits. Au 1er septembre 2016, il était chez HSBC à 7,40 %. Les clients de HSBC sont informés à l'avance de sa modification, au travers d'un de leurs relevés.

C'est plus simple de faire référence à un taux de base lorsque la banque est amenée à changer ses conditions tarifaires : elle n'a à informer que sur une grandeur, la même pour tous ses clients au lieu de dispenser une (des) information(s) spécifique(s) pour chacun d'eux.

Pour les découverts autorisés et les facilités de caisse, le taux applicable est le taux de base augmenté d'un supplément fixé, respectivement, dans l'offre de prêt et dans les conditions particulières qui lient les parties.

La commission minimum forfaitaire d'utilisation n'est pas facturée systématiquement.

Soit un compte qui pendant le mois d'août 2016 a été en découvert de 1 000 € du 16 au 26. Quels seront les frais qu'appliquera la banque, selon le type de découvert, en retenant comme taux nominal annuel TB + 4,00 % pour un découvert autorisé et TB + 7,00 % pour une facilité de caisse et en appliquant la commission minimum forfaitaire d'utilisation uniquement au découvert non autorisé ?

- la commission minimum forfaitaire d'utilisation est de 5,00 € ;
- la commission de plus fort découvert est égale à 0,05 % du plus fort découvert, soit 0,50 € ;
- le taux nominal annuel est respectivement 11,40 %, 7,40 % + 4,00 % (découvert autorisé), 14,40 % (facilité de caisse) et 16,90 % (découvert non autorisé).

Le taux nominal annuel est la référence pour calculer les « intérêts ». Ceux-ci sont égaux, par convention, au montant du découvert multiplié par le produit de la durée du découvert rapportée à l'année par le taux nominal annuel.

Le découvert a duré 11 jours.

Pour rapporter les durées à l'année, l'usage bancaire est de compter 360 jours dans l'année. Toutefois, la Cour de cassation a jugé que « le taux de l'intérêt conventionnel dans l'acte de prêt consenti à un consommateur ou à un non professionnel doit [...] être calculé sur la base de l'année civile » (cf. pourvoi 12-16651).

D'où les trois calculs, en retenant 366 jours puisque l'année 2016 est bissextile :

1 000 € × 11 jours/366 jours × 11,40 % = 3,43 € frais totaux : 3,93 € ;
1 000 € × 11 jours/366 jours × 14,40 % = 4,33 € frais totaux : 4,83 € ;
1 000 € × 11 jours/366 jours × 16,90 % = 5,08 € frais totaux : 10,58 €.

Il serait plus favorable pour la banque de faire le calcul en comptant 360 jours dans l'année, par exemple pour la facilité de caisse : 1 000 € $\times$ (11 jours/360 jours) $\times$ $11,40~\% = 3,48$ €, soit plus que 3,43 €.

En pratique, le calcul des intérêts se fera au vu des positions débitrices successives. Les frais sont imputés lors de l'arrêté du compte, en général chaque fin de mois. C'est à cette date que les frais viendront, éventuellement, augmenter le concours de la banque et, dans cette hypothèse, produiront eux-même des charges pour le client.

Soit un concours bancaire de 10 000 €, de durée 4 mois, au taux nominal annuel de 3,60 %. Les intérêts sont de 120 €. Le rapport entre, d'une part, la différence entre le montant remboursable et le montant mis à disposition, d'autre part, le montant mis à disposition s'appelle taux de la période (4 mois).

Le taux est dit post-compté car il s'applique au montant initial. Le résultat du calcul dépendra donc de quand sont facturés les intérêts, au moment du remboursement, intérêts dits « payables à terme échu », ou au moment de la mise à disposition des fonds, intérêts dits « payables d'avance » :

Au terme : 120 €/10 000 € $=1,20$ %, d'avance : 120 €/(10 000 € $-$ 120 €) $=$ $1,21$ %

D'une manière générale, pour le même montant d'intérêts :

1/taux intérêts d'avance = 1/taux intérêts à terme $-$ 1

Payer d'avance les intérêts coûte plus cher que les payer au terme.

On pourrait aussi calculer le taux d'intérêt de la période en calculant le rapport entre, d'une part, la différence entre le montant remboursable et le montant mis à disposition, d'autre part, le montant remboursable. On parle alors de taux précompté car il s'applique au montant final. Ce mode de calcul du taux de la période est peu usité en France sauf pour l'escompte des effets.

Les comptes sur livret font aussi référence à un taux nominal annuel. Ainsi, le Livret A et le Livret de Développement Durable et Solidaire procurent actuellement un taux nominal annuel de 3,00 %, net d'impôts, depuis début février 2023. Les intérêts sont calculés par quinzaine : tout versement a pour date de valeur le premier jour de la quinzaine suivante et tout retrait a pour date de valeur le dernier jour de la quinzaine précédente. Le taux d'intérêt de la quinzaine est 3,00 %/24=0,25 %.

Les intérêts sont calculés tout au long de l'année mais ne sont crédités au compte qu'en début d'année suivante. C'est uniquement à partir de leur crédit qu'ils produiront eux-même des intérêts.

1.2. Le taux annuel effectif global

Vous voulez acheter une voiture de 12 000 €. Le vendeur vous offre un crédit sur 60 mois, avec des mensualités constantes de 218,53 €. Il vous tient le discours suivant : « 60 fois 218,53 font 13 111,80, soit 1 111,80 € d'intérêts pour 5 ans, soit 222,36 € par an pour un prêt de 12 000 €, soit un taux annuel de 1,85 %, ce n'est pas cher ».

Mais les mensualités ne servent pas uniquement à payer des « intérêts » ; leur cumul sert aussi à rembourser le principal, à savoir la somme prêtée. Au départ, le concours est de 12 000 € ; au terme du prêt, il sera nul. En première approximation, on peut estimer que le concours sera de 6 000 € en moyenne pendant la durée du prêt. En rapportant les « intérêts annuels » à ce montant, on obtient un taux annuel de 3,71 %.

L'appréciation du coût de l'emprunt varie du simple au double. Il a été jugé nécessaire de fournir au consommateur un indicateur du coût des emprunts qui lui sont proposés. Ainsi, le code de la consommation demande que soit communiqué au client, au moment de l'offre de crédit, un taux, le taux annuel effectif global du prêt, TAEG en abrégé.

L'annexe à l'article R. 314-3 de ce code dispose que « L'équation de base, qui définit le taux annuel effectif global (TAEG), exprime sur base annuelle l'égalité entre, d'une part, la somme des valeurs actualisées des utilisations du crédit et, d'autre part, la somme des valeurs actualisées des montants des remboursements et paiements des frais, soit :

$$\sum_{k=1}^{m} C_k(1+X)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l(1+X)^{-s_l}$$

X est le TAEG ;
m désigne le numéro d'ordre de la dernière utilisation effectuée sur le crédit ;
k désigne le numéro d'ordre d'une utilisation effectuée sur le crédit, donc $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{m}$;
C_k est le montant d'une utilisation effectuée sur le crédit numéro k ;
t_k désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions d'année, entre la date de la première utilisation effectuée sur le crédit et la date d'une utilisation effectuée, donc $t_1 = 0$;
m' désigne le numéro d'ordre du dernier remboursement ou paiement de frais ;
l désigne le numéro d'ordre remboursement ou paiement de frais, donc $1 \leq \mathrm{l} \leq \mathrm{m'}$;
C_l est le montant d'un remboursement ou paiement de frais ;
s_l désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions d'année, entre la date

de la première utilisation effectuée sur le crédit et la date de chaque remboursement ou paiement de frais. ».

Dans notre exemple du prêt automobile, on obtient si les mensualités commencent à être payer un mois après l'obtention du crédit :

$$12\ 000 \text{ €} = +\ 218{,}53 \text{ €} \times (1+i)^{-1/12} + 218{,}53 \text{ €} \times (1+i)^{-2/12} + 218{,}53 \text{ €} \times (1+i)^{-3/12} + \cdots + 218{,}53 \text{ €} \times (1+i)^{-60/12}$$

Nous reconnaissons dans le membre de droite, la somme d'une suite en progression géométrique de raison $(1+i)^{-1/12}$:

$$12\ 000 \text{ €} = 218{,}53 \text{ €} \times \frac{(1+i)^{-1/12} - (1+i)^{-60/12} \times (1+i)^{-1/12}}{1-(1+i)^{-1/12}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur du membre de droite par $(1+i)^{1/12}$:

$$12\ 000 \text{ €} = 218{,}53 \text{ €} \times \frac{1-(1+i)^{-60/12}}{(1+i)^{1/12}-1}$$

Le rapport du capital, K, sur la mensualité, M, vaut 54,91. On cherche donc une solution à :

$$54{,}91 = \frac{1-(1+i)^{-5}}{(1+i)^{1/12}-1}$$

Comme somme de fonctions strictement décroissantes de $]-1\,;+\infty[$ vers $]0\,;+\infty[$, le membre de droite admet une seule et unique solution pour toute valeur strictement positive à gauche.

Le membre de droite donne respectivement 57,28 et 54,77 avec 1,85 % et 3,71 % les évaluations du début. La seconde est plus proche du résultat.

Un auditeur trouve en utilisant les fonctions de la calculatrice financière 3,54 %. Vérifions la valeur du membre de droite ; on obtient 54,99. Ce n'est pas le bon résultat.

Mais le calcul a été bien mené. Le moteur de la calculette a cherché le taux mensuel qui rend égal le montant prêté aux mensualités et exprime ce taux mensuel en taux annuel en le multipliant par douze. L'analyse de l'équation de base montre que la relation entre le TAEG et ce taux mensuel est différente : $1 + \text{TAEG} = (1 + \text{taux mensuel solution})^{12}$; le TAEG, qui est un taux annuel, et le taux mensuel solution sont dits « équivalents ».

En divisant par 12 le résultat trouvé par la calculette, on obtient un taux mensuel de 0,2952... % qui a pour taux annuel équivalent 3,60 %.

On vérifie que, pour cette valeur, le membre de droite est égal à 54,91. Le taux annuel effectif global du prêt est 3,60 %.

1.3. La nécessité d'un moteur de résolution

Soit l'équation suivante où l'on cherche i en fonction de $x > 0$ et de $n > 0$:

$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = x$, en convenant que $i = 0$ est solution lorsque $x = n$

L'équation précédente en est un cas particulier avec $x = 54{,}91$ et $n = 60$, i étant ici le taux mensuel équivalent au taux annuel cherché précédemment.

Nous voyons que lorsque n est entier, le membre de gauche correspond comme précédemment à une somme d'une série géométrique, la raison en étant $1 + i$.

Plus généralement, le membre de gauche est strictement décroissant par rapport à i (cf. La formule de Black and Scholes). Sa limite en -1^+ est $+\infty$ et en $+\infty$, $-\infty$.

Pour $x > 0$ et $n > 0$ donnés, l'équation a donc une solution i et une seule sur $]-1\,;+\infty[$.

Pour trouver la solution, on pourrait utiliser une table à double entrée avec les résultats correspondants et procéder alors par interpolation/extrapolation.

Dans l'exemple précédent, calculons le membre de droite pour 3,500 %, 3,700 % et 3,800 %. On obtient respectivement 55,044, 54,783 et 54,653.

L'interpolation consiste à prendre deux résultats encadrant la valeur cible alors que l'extrapolation utilise deux résultats qui sont du même coté par rapport à la valeur cible.

Avec 3,500 % et 3,700 %, on obtient 3,600 % comme approximation ; avec 3,700 % et 3,800 %, 3,601 %. Ces méthodes sont très efficaces mais sont conditionnées par la présence de la table des résultats.

On peut alors envisager de partir de deux points quelconques et d'interpoler suffisamment de fois en prenant à chaque pas comme nouvelles hypothèses la meilleure des deux précédentes et l'approximation obtenue pour obtenir une convergence. Ceci est possible du fait de la convergence induite par la stricte monotonie de la fonction f réduite à la variable i. Mais le nombre d'itérations peut être élevé si on part de points trop éloignés de la solution et demande de bien organiser les travaux.

Il est donc fait le choix ici d'utiliser un moteur financier qui procède au calcul. Ce peut être celui d'un tableur, d'une calculatrice résolvant les équations ou d'une calculatrice financière. C'est cette dernière solution qui est retenue avec une prédilection pour l'HP 10BII+, l'HP 12C étant proscrite.

1.4. Le moteur

Voilà, nous l'avons dans notre main la fameuse calculatrice.

Et le premier geste est de la poser.

Que cherchons à faire ? Résoudre :

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{(1+i)^{1/12}-1} = 54{,}91$$

La notice succincte livrée avec l'outil laisse présager que l'on obtient la solution, « l'intérêt par an », en indiquant « le nombre d'échéances, la valeur actuelle, l'échéance et la valeur future », en précisant si l'on est en « mode Begin » ou « End » et le nombre de paiements par année ». Pour faire cela, il convient d'assigner des valeurs à des registres de la calculatrice et d'appeler le registre voulu.

Dans le cas d'espèce, par analogie avec l'exemple de la notice, on procède ainsi :

$$\begin{array}{rcl} 60 & \to & N \\ -10\,000 & \to & PV \\ 218{,}53 & \to & PMT \\ 0 & \to & FV \\ \text{END} & \to & Beg/End \\ 12 & \to & P/YR \\ 3{,}54 & \leftarrow & I/YR \end{array}$$

Qu'a donc fait le moteur ?

Pour cela, regardons le « Manuel d'utilisation » de la « hp 10BII calculatrice financière ». Ce manuel est une référence indispensable pour savoir se servir de la calculatrice et comprendre ce qu'elle fait.

En annexe, figurent les « Calculs financiers sur des flux constants » :

Facteur de mode paiement : $S = 0$ pour le mode End ; $S = 1$ pour le mode Begin.

$$i\% = \frac{I/YR}{P/YR}$$

$$0 = PV + PMT \times (1 + S \times i\%/100) \times \frac{1-(1+i\%/100)^{-N}}{i\%/100} + FV \times (1+i\%/100)^{-N}$$

Ces équations établissent des relations entre les valeurs dans les registres N, PV, PMT, FV, Beg/End, P/YR et I/YR en introduisant deux variables intermédiaires S et $i\%$.

Dans quelle mesure ces équations ont un lien avec la notre ?

Tout d'abord, il faut que PV ou FV soit nul. On retiendra $FV = 0$. Ensuite, $i\%/100$ est un bon candidat pour représenter notre $(1+i)^{1/12} - 1$. Alors avec $S = 0$ et $N = 60$ et un rapport -PV/PMT égal à 54,91, on obtient notre équation.

Le résultat du calcul mené, 3,54, s'interprète ainsi comme $(1+i)^{1/12} - 1 = 3{,}54\ \%/12$.

Le TAEG est le taux annuel équivalent au taux mensuel proportionnel au taux affiché, celui-ci étant exprimé en pourcentage.

1.5. Taux proportionnels, taux équivalents

Deux façons existent pour comparer des taux de période : on peut dire qu'ils sont proportionnels ou qu'ils sont équivalents.

Deux taux de période, t_1 attaché à la durée d_1 et t_2 attaché à la durée d_2, sont dits proportionnels lorsque : $t_2 = t_1 \times (d_2/d_1)$. Par exemple, le taux par quinzaine de 0,125 %, est proportionnel au taux nominal annuel 3,00 %. De même lors de l'arrêt en fin de mois des « intérêts » sur découvert bancaire, les modalités de leur calcul pour une position débitrice déterminée reviennent à appliquer le taux proportionnel sur la durée de la position débitrice au taux nominal annuel, en comptant le nombre de jours pour les opérations avec les particuliers.

Deux taux de période, t_1 attaché à la durée d_1 et t_2 attaché à la durée d_2, sont dits équivalents lorsque : $1 + t_2 = (1 + t_1)^{d_2/d_1}$. Par exemple, 0,500 % mensuel est équivalent à 6,168 % annuel. Avec la formule du binôme :

$$(1 + 0{,}500\ \%)^{12} = 1 + 12 \times 0{,}500\ \% + 12 \times 11/2 \times (10^3/2)^{-2} + \ldots$$

Le terme de premier ordre, $12 \times 0,500$ %, correspond à 6,00 %, le taux proportionnel. Le terme de deuxième ordre, $33/2 \times 10^{-6}$, apporte un correctif de 0,165 %. Arrêter là le calcul est assez efficace au regard du résultat exact.

Le taux mensuel équivalent à 3,00 % annuel est 0,2466 %. Avec la formule du binôme :

$$(1 + 3\ \%)^{1/12} = 1 + 1/12 \times 3\ \% - 1/12 \times 11/12/2 \times 3 \times (10^{-2})^2 + \ldots$$

Le terme de premier ordre, 3 %/12, correspond à 0,250 %, le taux proportionnel. Le terme de deuxième ordre, $11/12^2/2 \times 9 \times 10^{-4} = 11/32 \times 10^{-4}$, apporte un correctif de 0,344 $\times 10^{-4}$. Arrêter là le calcul est très efficace au regard du résultat exact.

Prenons le taux de période de 0,500 % pour un mois. Par souci de comparaison, il est souhaitable d'exprimer un taux annuel qui lui corresponde. Ainsi, le taux annuel équivalent est 6,18 % et le taux annuel proportionnel est 6,00 %.

1.6. Passage du taux nominal au taux effectif

Les calculatrices financières permettent de déterminer le taux annuel équivalent à un taux mensuel à partir du taux annuel proportionnel à ce même taux mensuel. Par exemple, en lisant le manuel de la HP 10B, la séquence d'instructions est la suivante pour un taux annuel de 6,00 % proportionnel à un taux mensuel :

$$\begin{array}{rcl} 12 & \rightarrow & P/YR \\ 6{,}00 & \rightarrow & NOM \\ 6{,}18 & \leftarrow & EFF \end{array}$$

Le registre P/YR reçoit le nombre de mois dans l'année, 12, le registre NOM enregistre le taux proportionnel en pourcentage et le registre EFF donne le taux équivalent en pourcentage. Réciproquement, en assignant 6,00 à EFF, on obtient 5,84 dans NOM : 5,84 % est le taux annuel proportionnel au taux mensuel auquel est équivalent le taux annuel de 6,00 %.

$$\begin{array}{rcl} 12 & \rightarrow & P/YR \\ 6{,}00 & \rightarrow & EFF \\ 5{,}84 & \leftarrow & NOM \end{array}$$

Le manuel exprime la relation qui existe entre les trois registres :

$$1 + EFF/100 = (1 + NOM/100 \div P/YR)^{P/YR}$$

1.7. L'annuité

L'annuité à terme échu est égale à $(1 - (1+i)^{-n})/i$, où i est le taux de période et n le nombre de périodes. Les calculs avec des annuités à terme échu s'effectuent en mode End.

L'annuité d'avance est égale à l'annuité à terme échu, multipliée par $(1+i)$, où i est le taux de période. Les calculs avec des annuités à terme échu s'effectuent en mode Begin.

L'annuité d'avance en progression géométrique est égale à l'annuité d'avance calculée au taux $(1+i)/(1+r) - 1$ où i est le taux de période et $(1+r)$ la raison de la progression géométrique.

L'annuité à terme échu en progression géométrique est égale, divisée par (1 + r), à l'annuité à terme échu calculée au taux $(1+i)/(1+r) - 1$ où i est le taux de période et $(1+r)$ la raison de la progression géométrique.

L'annuité à terme échu en progression arithmétique, dont le premier terme est un et la raison un, peut se calculer de deux manières :

– c'est l'opposée de la dérivée, appréciée au taux i et divisée par $(1+i)$, de la fonction qui à x associe l'annuité à terme échu constante au taux x, où i est le taux de période ; pour mener les calculs, on approche la dérivée en calculant la fonction en i et en i augmenté de ϵ très petit et en rapportant la différence des deux résultats à ϵ ;
– c'est, divisée par i, la valeur de l'annuité d'avance constante au taux i, avec un versement final négatif de $-n$, où i est le taux de période et n le nombre de périodes.

Les résultats sur les annuités s'obtiennent en se souvenant seulement de l'annuité à terme échu et par un raisonnement comme celui qui suit ; par exemple, pour apprécier la valeur de :

$$S = 1 \cdot (1+i)^{-1} + 2 \cdot (1+i)^{-2} + 3 \cdot (1+i)^{-3} + \cdots + (n-1) \cdot (1+i)^{-n+1} + n \cdot (1+i)^{-n}$$

On multiplie S par $(1+i)$ et on lui déduit S. Sauf le premier terme de $(1+i) \cdot S$ et le dernier de S, les termes d'un degré déterminé se retrouvent une fois par différence entre $(1+i) \cdot S$ et S.

On a donc :

$$i \cdot S = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (1+i)^{-n+1} - n \cdot (1+i)^{-n}$$

CHAPITRE 2

EXPLORATION DES EMPRUNTS

2.1. Les exemples de l'annexe III de la directive 98/7/CE

La réglementation relative à l'information contractuelle en matière de prêt à la consommation résultait de la directive 98/7/CE, largement inspirée par la France.

La définition du TAEG figure dans l'annexe I de cette directive et une partie des exemples de l'annexe au décret n° 2002-928 y figurent en annexe III.

2.1.1. 1er exemple. — La somme prêtée de 1 000 € est remboursée en un seul versement de 1 200 €, 1,5 an après la date du prêt.

Le rapport 1 200 à 1 000 fournit $(1+i)$ où i est le taux sur 1,5 an. Pour trouver le taux annuel équivalent, on exposante $(1+i)$ par 2/3, rapport entre un an et 1,5 an, et on diminue le résultat de un : le TAEG est de 12,92 %.

2.1.2. 2e exemple. — La somme prêtée de 1 000 €, mais le prêteur retient 50 € pour frais de dossier, de sorte que le prêt ne porte en fait que sur 950 € ; le remboursement de 1 200 €, comme dans le premier exemple, est effectué 1,5 an après la date du prêt.

Le rapport 1 200 à 950 fournit $(1+i)$ où i est le taux sur 1,5 an. Par équivalence, on obtient un TAEG de 16,85 %.

2.1.3. 3e exemple. — La somme prêtée est de 1 000 € remboursables en deux versements de 600 € chacun, effectués respectivement après un et deux ans.

Avec le moteur financier :

$$\begin{array}{rcl}
2 & \rightarrow & N \\
-1\ 000 & \rightarrow & PV \\
600{,}00 & \rightarrow & PMT \\
0 & \rightarrow & FV \\
\text{END} & \rightarrow & Beg/End \\
1 & \rightarrow & P/YR \\
13{,}07 & \leftarrow & I/YR
\end{array}$$

Le TAEG est de 13,07 %.

2.1.4. 4[e] exemple. — La somme prêtée est 1 000 € et les montants à payer par l'emprunteur sont après trois mois 272 €, après six mois 272 € et après douze mois 544 €.

La documentation de la calculatrice nous montre qu'elle peut déterminer le taux trimestriel effectif global grâce à son application flux variables :

$$\begin{array}{rcl}
-1\ 000 & \rightarrow & CF_0 \\
272 & \rightarrow & CF_1 \\
2 & \rightarrow & N_1 \\
0 & \rightarrow & CF_2 \\
544 & \rightarrow & CF_3 \\
3{,}14 & \leftarrow & IRR/YR
\end{array}$$

Le résultat est sensible au registre P/YR où a été mis 1. Pour faciliter l'obtention du TAEG, on porte ce registre à 4 et alors IRR/YR donne 12,58.

Le taux annuel proportionnel au taux trimestriel effectif global est 12,58 %. Par conversion, on obtient le taux annuel équivalent à ce taux trimestriel et le TAEG est donc de 13,19 %.

2.2. Les autres exemples de la règlementation française

2.2.1. 5[e] exemple. — La somme prêtée est de 1 000 € remboursables en 36 mensualités à terme échu d'un montant 30,42 €.

Avec la calculatrice on obtient le taux annuel proportionnel au taux mensuel effectif global qui faudra convertir en taux annuel équivalent :

$$\begin{array}{rcl} 36 & \rightarrow & N \\ -10\ 000 & \rightarrow & PV \\ 30{,}42 & \rightarrow & PMT \\ 0 & \rightarrow & FV \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \\ 6{,}00 & \leftarrow & I/YR \end{array}$$

Le TAEG vaut 6,16 %.

2.2.2. Exemple 5 *bis*. — La somme prêtée est de 10 000 € remboursables en 36 mensualités à terme échu d'un montant 317,73 €, la première mensualité intervenant un mois et demi après la mise à disposition des fonds.

L'équation de base s'écrit :

$$\begin{aligned} 10\ 000\ \text{€} = &+ 317{,}73\ \text{€}\ \times (1+i)^{-1/12-1/24} + 317{,}73\ \text{€} \times (1+i)^{-2/12-1/24} \\ &+ 317{,}73\ \text{€} \times (1+i)^{-3/12-1/24} + \cdots + 317{,}73\ \text{€} \times (1+i)^{-36/12-1/24} \end{aligned}$$

On reconnaît à droite une somme de série géométrique :

$$10\ 000/317,73 = \frac{(1+i)^{-1/12-1/24} - (1+i)^{-36/12-1/24} \times (1+i)^{-1/12}}{1-(1+i)^{-1/12}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur du membre de droite par $(1+i)^{1/12}$, on obtient, avec i_m égal au taux mensuel équivalent au taux annuel i cherché :

$$10\ 000/317,73 = ((1+i)^{-1/24} - (1+i)^{-36/12-1/24})/i_m$$

Regardons le terme $1-(1+i)^{-1/24}$: il est égal à $i/24 + O(i^2)$. De même, $i_m = (1+i)^{-1/12} - 1 = i/12 + O(i^2)$.

$(1-(1+i)^{-1/24})/i_m$ est donc égal à $1/2 + O(i)$. Nous rajoutons la gauche de cette expression au membre de droite de notre équation et la droite au membre de gauche. Nous considérons alors i vérifiant l'équation :

$$10\ 000 + 317,73/2 \approx 317,73((1-(1+i)^{-36/12-1/24})/i_m$$

Cette formule est intéressante car elle se rapproche de celle du moteur financier avec :

$$\begin{array}{rcl} 36,5 & \rightarrow & N \\ -10\ 000-317{,}73/2 & \rightarrow & PV \\ 317,73 & \rightarrow & PMT \\ 0 & \rightarrow & FV \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \end{array}$$

On assignant ces valeurs, on obtient pour I/YR, 8,69 qui, après conversion en taux effectif, donne un TAEG de 9,05 %.

Le moteur accepte des valeurs non entières pour le registre N.

2.2.3. Généralisation du cas précédent. — La somme S se rembourse en n mensualités d'un montant m, le première mensualité intervenant $(1-\alpha)$ mois, α étant positif ou négatif et « petit », c'est à dire compris entre -1 et 1.

Toujours avec les mêmes raisonnements, l'équation de base revient à, avec i_m égal au taux mensuel équivalent au taux annuel i cherché :

$S/m = ((1+i)^{\alpha/12} - (1+i)^{(-n+\alpha)/12})/i_m$

Comme tout à l'heure, intéressons nous au terme à $1-(1+i)^{\alpha/12}$. Il est égal à $-\alpha i/12 + O(i^2)$ et donc $1-(1+i)^{\alpha/12}/i_m = -\alpha + O(i)$. Nous rajoutons la gauche de cette expression au membre de droite de notre équation et la droite au membre de gauche. Nous considérons alors i vérifiant l'équation approchante :

$S - \alpha m \approx m((1-(1+i)^{(-n+\alpha)/12})/i_m$

Cette équation se résout avec le moteur financier :

$$\begin{array}{rcl} n-\alpha & \to & N \\ -S+\alpha\cdot m & \to & PV \\ m & \to & PMT \\ 0 & \to & FV \\ \text{END} & \to & Beg/End \\ 12 & \to & P/YR \end{array}$$

On assignant ces valeurs, on obtient pour I/YR qui, après conversion en taux effectif, donne le TAEG du prêt.

Cette méthode sera appelée par la suite la méthode de la durée résiduelle, nette de mensualité courue.

Regardons l'erreur commise en prenant α pour $((1+i)^{\alpha/12}-1)/i_m$

Au second ordre, $(1+i)^{\alpha/12}-1$ donne $(\alpha/12)\cdot i - ((\alpha/12)(1-\alpha/12)/2)\cdot i^2 + O(i^3)$ et $i_m = (1+i)^{1/12}-1$ donne $(1/12)\cdot i - (11\cdot 12^2/2)\cdot i^2 + O(i^3)$.

Ainsi l'erreur en prenant α est par excès de $\alpha/12\cdot i(1/12-\alpha/12)/2)\cdot i + O(i^2)$.

On pourra vérifier qu'il n'y a pas d'erreur quand α vaut 0 ou 1.

Comment faire si la première mensualité intervient plus de 2 mois après la mise à disposition des fonds ?

Soit d la durée avant la première mensualité.

Si d est entier, on utilise la méthode des flux variables en prenant $d-1$ paiements nuls comme premiers flux.

Sinon, on encadre d par deux entiers, d_1 et d_1+1, et on interpole le taux annuel proportionnel au taux effectif mensuel par les taux annuels proportionnels obtenus avec les flux variables pour d_1 et d_1+1.

Par exemple, la somme prêtée est de 10 000 € remboursables en 54 mensualités à terme échu d'un montant 234,42 €, la première mensualité intervenant 6 mois et une décade après la mise à disposition des fonds.

Avec les notations précédentes, ici $d = 6 + 1/3$, on procède donc aux calculs sur flux variables suivants :

$$\begin{array}{rcl} -10\ 000 & \rightarrow & CF_0 \\ 0 & \rightarrow & CF_1 \\ 6,\ \text{puis}\ 5 & \rightarrow & N_1 \\ 234{,}42 & \rightarrow & CF_2 \\ 54 & \rightarrow & N_2 \\ 12 & \rightarrow & P/YR \end{array}$$

On obtient successivement 8,703 et 8,988 dans le registre IRR/YR, soit avec pondération 8,891, ce qui donne 9,70 % de TAEG.

À cette occasion, le lecteur apprendra du manuel de la calculatrice à rappeler les registres d'un calcul à flux variables et à modifier ceux qui l'intéressent.

Un calcul alternatif consiste à utiliser la méthode de la durée résiduelle, nette de mensualité courue.

Ici, α vaut $-(5 + 1/3)$ et la durée résiduelle $59 + 1/3$.

$$\begin{array}{rcl} 59 + 1/3 & \rightarrow & N \\ -10\ 000 - 234{,}42 \cdot (5 + 1/3) & \rightarrow & PV \\ 234{,}42 & \rightarrow & PMT \\ 0 & \rightarrow & FV \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \end{array}$$

On obtient $I/YR = 8{,}572$, un résultat qui s'écarte du précédent.

Donnons une approximation de $(1 - (1+i)^{-\alpha/12} - 1)/i_m$ sur la base d'un taux annuel proportionnel de 8,57 % au taux effectif mensuel.

On observe que cette expression s'obtient avec l'opposé du registre PV avec comme I/YR le taux annuel proportionnel à i_m en pourcent dans le système suivant :

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \rightarrow & N \\ 1 & \rightarrow & PMT \\ 0 & \rightarrow & FV \\ I/YR & \rightarrow & I/YR \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \end{array}.$$

Dans le cas d'espèces, on obtient en $-PV$ 5,21 au lieu de 5,33. C'est avec cette valeur que l'on applique à nouveau la méthode de la durée résiduelle, nette de mensualité courue :

$$\begin{array}{rcl} 59 + 1/3 & \rightarrow & N \\ -10\ 000 - 234{,}42 \cdot 5{,}21 & \rightarrow & PV \\ 234{,}42 & \rightarrow & PMT \\ 0 & \rightarrow & FV \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \end{array}$$

On obtient 8,70 % dans I/YR.

Les deux méthodes donnent de résultats très proches, la seconde qui demande plus de changements de registres converge plus rapidement.

2.3. Amortissement des emprunts

L'amortissement d'un emprunt est la partie du capital qui est remboursée à chaque échéance. Ce paiement se fait en même temps que celui des « agios » dus pour la même période.

En pratique, le calcul des « agios » se fera au vu du capital restant dû. Le capital restant à payer alors en fin de période sera le capital dû en début de période, augmenté des « agios » de la période et diminué du remboursement du prêteur en début de période.

Lors de la conclusion du contrat de prêt, la banque doit expliciter les « agios » qu'elle applique et leurs modalités de calcul. En particulier, elle doit préciser le(s)taux débiteurs qui auront cours tout le long de l'emprunt pour arrêter les « intérêts ».

Ces derniers ne sont qu'une des composantes des « agios », d'autres frais pouvant s'appliquer, notamment ceux que la banque pourrait exiger au titre d'une assurance.

Nous allons maintenant utiliser des hypothèses simplifiées avec un taux débiteur mensuel fixe i_m et des mensualités constantes m qui supportent un montant fixe de frais en sus des intérêts et de la charge d'amortissement de l'emprunt.

Soit m', la mensualité nette des autres frais, elle se dénomme mensualité financière.

Soit K_j le capital restant dû après paiement de la j^{e} mensualité, j étant un entier compris entre 0 et n où n désigne le nombre de paiements.

Nous avons : $K_{j+1} = K_j \cdot (1 + i_m) - m', 0 \leq j < n$

Par récurrence descendante, nous obtenons :

$K_j = \sum_{k=j+1}^{n} m \cdot (1 + i_m)^{-k}, 0 \leq j \leq n$

Cette formule est basée sur une vision prospective, le capital restant dû est la somme des mensualités financières à échoir ramenées au taux débiteur.

La vision rétrospective lorsque le service des mensualités commence un mois après la mise à disposition des fonds s'obtient par récurrence :

$K_j = K_0 - \sum_{k=1}^{j} m \cdot (1 + i_m)^{k}, 0 \leq j \leq n$

Le capital restant dû est le capital emprunté, diminué de la somme des mensualités financières échues projetées au taux débiteur.

Lorsque les autres frais sont nuls, avec en particulier aucun frais de dossier, le TAEG de l'emprunt est l'équivalent annuel du taux débiteur mensuel. C'est un cas particulier qui ne se généralise pas : le TAEG est une mesure du coût du prêt dans son ensemble, alors que le taux débiteur commande la vie de l'emprunt, *i.e.* permet de déterminer le capital restant dû à toute époque.

2.4. TAEG d'un découvert bancaire

Le compte courant d'un particulier présente un solde positif de 600 € au 1er août 2017. La 1re quinzaine du mois il enregistre les opérations suivantes :

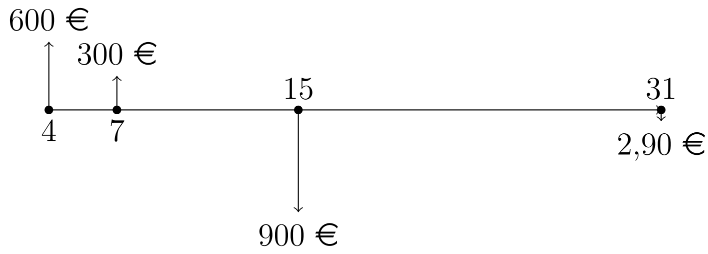
- le 4	relevé carte bleue	1 200 € ;
- le 7	retrait d'espèces	300 € ;
- le 15	virement entrant	1 200 €.

La convention de compte courant prévoit une périodicité mensuelle d'arrêté de compte, des intérêts sur découvert bancaire calculés au taux nominal annuel de 9,0 %, plus une commission de plus fort découvert de 0,075 %.

Les soldes successifs sont -600 €, -900 € et 300 € les 4, 7 et 15 août.

Le découvert est de 600 € pendant 3 jours, puis de 900 € pendant 8 jours, ce qui donne des intérêts de $3/365 \cdot 9$ %·600 €+$8/365 \cdot 9$ %·900 €, soit 2,22 €, et une commissions de plus fort découvert de $0,075$ %·900 €, soit 0,68 €. Les agios de 2,90 € sont réglés le 31 août.

Le découvert peut être décrit par le diagramme suivant :



Nous pourrions établir le taux d'équilibre de cette opérations avec le moteur à flux variables :

$$\begin{array}{rcl}
365 & \rightarrow & P/YR \\
-600 & \rightarrow & CF_0 \\
0 & \rightarrow & CF_1 \\
2 & \rightarrow & N_1 \\
-300 & \rightarrow & CF_2 \\
0 & \rightarrow & CF_3 \\
7 & \rightarrow & N_3 \\
900 & \rightarrow & CF_4 \\
0 & \rightarrow & CF_5 \\
15 & \rightarrow & N_5 \\
2,90 & \rightarrow & CF_6 \\
11{,}68 & \leftarrow & IRR/YR
\end{array}$$

Le taux obtenu est un taux nominal, nous le convertissons pour obtenir le taux effectif annuel :

$$\begin{array}{rcl}
11{,}68 & \rightarrow & NOM \\
12{,}39 & \leftarrow & EFF
\end{array}$$

Nous pourrions considérer que le TAEG du découvert est 12,39 %.

Cependant l'article R. 314-7 renvoie pour définir le TAEG d'un découvert à la méthode définie à la parie B de l'annexe du décret n° 2002-928.

La somme des multiples des soldes débiteurs par le nombre de jours pendant lequel ils interviennent, se dénomme nombre débiteur du découvert.

Dans le cas étudié, le nombre débiteur est 3 $j \cdot 600$ €+8 $j \cdot 900$ €, soit 9 000 €j.

Le coût du découvert est rapporté au nombre débiteur du découvert, ce qui donne un taux journalier.

Le TAEG est le taux annuel équivalent à ce taux journalier, 365 ou 366 jours étant retenus pour l'année.

Dans le cas d'espèce, le taux journalier est $2,90/9\ 000$, soit 0,0322... %, qui à pour taux équivalent annuel 12,48 %.

Le TAEG du découvert considéré est 12,48 %.

2.5. Plafonnement des TAEG par les taux de l'usure

L'usure désigne pour un prêt la pratique d'un intérêt à un taux abusif.

En France, le taux à partir duquel le TAEG d'un prêt devient usuraire est défini par la Banque de France au regard des TAEG pratiqués par les banques. Pour chaque catégorie de prêts est ainsi défini un taux usuraire. Ces taux sont portés à la connaissance du public par arrêté du ministre de l'économie et des finances.

Pratiquer l'usure appelle une sanction pénale et la substitution de l'intérêt légal, défini semestre après semestre, aux agios convenus.

CHAPITRE 3

ÉTUDE DES OBLIGATIONS

3.1. Caractéristiques des obligations

Une obligation est une valeur mobilière qui constitue une créance sur son émetteur, elle est donc représentative d'une dette financière à moyen, long terme, parfois même à perpétuité. Cette dette est émise dans une devise donnée, pour une durée définie et elle donne droit au paiement d'un intérêt fixe ou variable, appelé coupon.

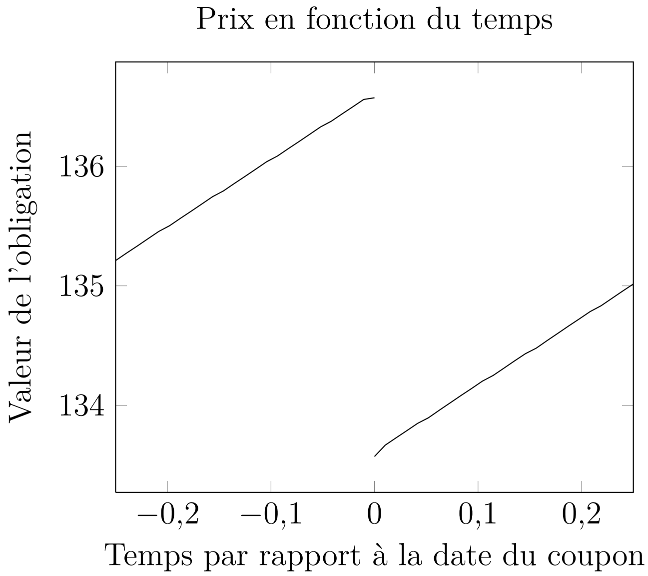
En Europe, la majeure partie des obligations ont une valeur nominale d'une unité monétaire, sont remboursables au pair, *i.e.*, à leur valeur nominale, en une seule fois à l'échéance, *in fine*, et versent un coupon annuellement. Si ce dernier est nul, l'obligation s'appelle un zéro-coupon.

Dans ce cours, nous nous limiterons aux obligations pour lesquelles le coupon est fixe.

Les obligations sont échangées de gré à gré et sur des marchés organisés. Nous privilégierons comme sujet d'étude les obligations d'État cotées sur le Börse de Francfort.

3.2. Le cours en pied de coupon

Soit une obligation sur le point de détacher son coupon. Sa valeur va connaître une discontinuité à la baisse au moment du détachement de son coupon.



Il est donc d'usage de séparer arbitrairement la valeur actuelle d'une obligation en cours, dit également cours pied de coupon, exprimé en % du nominal et en coupon couru, exprimé également en % du nominal.

Le coupon couru est égal au coupon proratisé au temps écoulé depuis le dernier coupon, ce temps étant apprécié en nombre de jours, et s'exprime avec trois décimales pour 100 de nominal.

Ainsi un coupon de 3,00 % qui se détache le 5 octobre donnait un coupon couru le 31 décembre 2019 de $3 \cdot 87/366$, soit 0,715, puisque le 29 février s'intercale entre les deux coupons.

Cette mécanique permet de comptabiliser progressivement les prochains coupons.

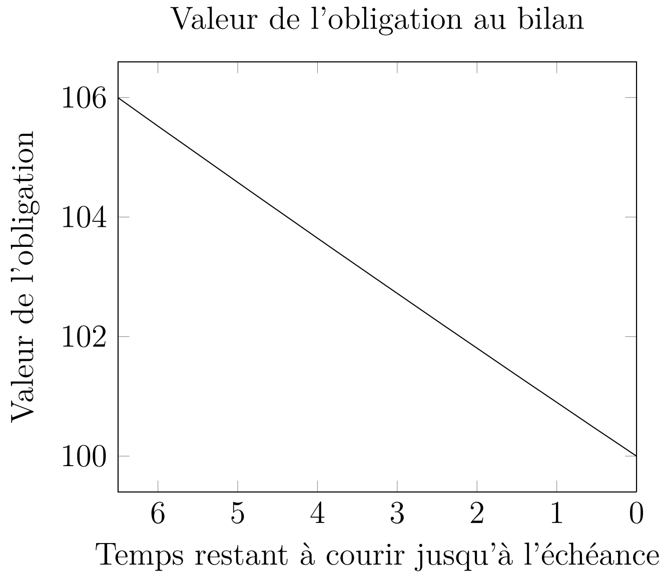
3.3. Amortissement de la surcote, étalement de la décote

Considérons une obligation de coupon annuel 3,00 qui arrive à échéance dans 6 ans et demi et qui a été achetée 106,00 en pied de coupon.

Si l'obligation est conservée jusqu'à l'échéance et que son prix en comptabilité reste identique à son prix d'achat, une perte de 6,00 interviendra lors du remboursement à l'échéance.

C'est pourquoi les entités qui enregistrent les obligations en coût historique vont amortir la surcote de 6,00 sur la durée de détention.

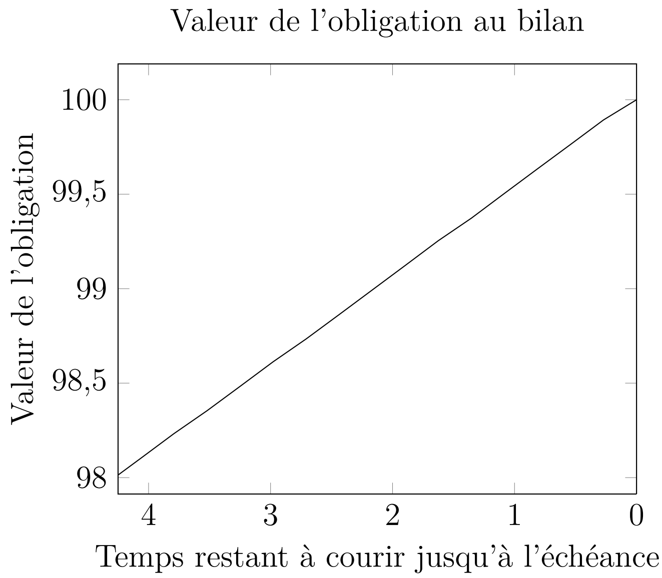
L'amortissement dit actuariel est préconisé par opposition au linéaire.



De même, soit une obligation qui arrive à échéance dans 4 ans et quart et qui a été achetée 98,00 en pied de coupon.

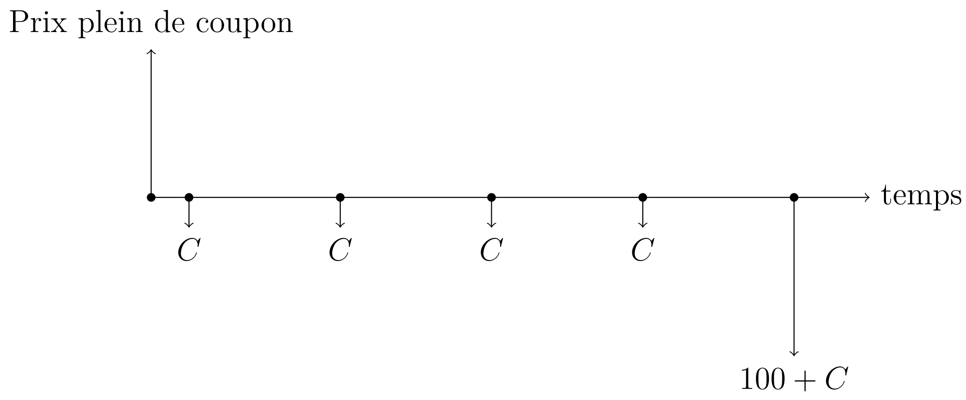
Si l'obligation est conservée jusqu'à l'échéance et que son prix en comptabilité reste identique à son prix d'achat, un gain de 2,00 interviendra lors du remboursement à l'échéance.

Pour enregistrer cette obligation en coût historique, la décote de 2,00 sera étalée sur la durée de vie de l'obligation, selon la méthode dite actuarielle.



3.4. Taux de rendement actuariel d'une obligation

Considérons une obligation de prix P en pied de coupon à une date donnée ; alors il existe un et un seul taux i qui égalise le prix plein de coupon avec les tombées attendues de l'obligation. Ce taux est appelé taux de rendement actuariel, en abrégé le TRA, de l'obligation.



$P + d \cdot C = \sum_{k=1}^{n} C \cdot (1+i)^{-(k-d)} + 100 \cdot (1+i)^{-(n-d)}$, en notant C le coupon, n le nombre de coupons à échoir, d le prorata d'année écoulée depuis le dernier coupon et en considérant que l'obligation est remboursée au pair.

La calculatrice financière dispose d'un outil de calcul pour les obligations qui permet de déterminer le TRA d'une obligation en fonction de son prix en pied de coupon et de faire l'opération inverse. Il vous appartient de consulter la documentation de la calculatrice pour maîtriser ces opérations.

Par analogie avec la méthode nette de mensualité courue vue précédemment, nous allons exhiber un calcul approché qui utilise le moteur de flux fixes.

L'équation précédente peut s'écrire en reconnaissant la somme d'une suite géométrique : $P + d \cdot C = C \cdot (1+i)^d \cdot (1 - (1+i)^{-n})/i + 100 \cdot (1+i)^{-(n-d)}$

En rajoutant $C \cdot (1 - (1+i)^d)/i$ aux deux membres, on obtient : $P + d \cdot C + C \cdot (1 - (1+i)^d)/i = C \cdot (1 - (1+i)^{-(n-d)})/i + 100 \cdot (1+i)^{-(n-d)}$

Intéressons à $(1 - (1+i)^d)/i$. Ce terme est équivalent à $-d + O(i)$.

Nous obtenons donc :

$P \approx C \cdot (1 - (1+i)^{-(n-d)})/i + 100 \cdot (1+i)^{-(n-d)}$

Or, l'équation $P = C \cdot (1 - (1+i)^{-(n-d)})/i + 100 \cdot (1+i)^{-(n-d)}$ peut se résoudre avec le moteur à flux fixes :

$$\begin{array}{rcl} \text{Durée résiduelle de l'obligation} & \rightarrow & N \\ -\text{Prix en pied de coupon} & \rightarrow & PV \\ \text{Coupon de l'obligation} & \rightarrow & PMT \\ \text{Valeur de remboursement de l'obligation} & \rightarrow & FV \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 1 & \rightarrow & P/YR \\ \text{TRA de l'obligation} & \leftarrow & I/YR \end{array}$$

3.5. Équivalence entre le prix d'une obligation et son taux de rendement actuariel

Pour une obligation donnée, à une date donnée, disposer de son cours en pied de coupon permet d'établir son TRA.

Réciproquement, connaissant son TRA à une date donnée, on obtient le prix plein de coupon en ramenant ses tombées et donc son cours en pied de coupon.

À une date donnée, il existe donc une relation biunivoque entre le cours en pied de coupon d'une obligation et son TRA.

Le TRA est une mesure globale du prix de l'obligation, comme le TAEG l'est pour le coût d'un emprunt.

Par la suite, nous allons analyser le prix d'une obligation comme somme des prix de chacune de ses tombées à venir. Nous observerons alors que ses prix ne sont pas commandés par le TRA mais par chacun par un TRA propre et que c'est leur résultante qui donne le TRA de l'obligation.

D'aucune manière, le TRA commande la valeur à venir de l'obligation.

Ce constat nous amènera à infirmer le concept de duration d'une obligation qui n'aurait de sens que si, à toutes échéances, le TRA d'une obligation était le même, ce qui est contraire à l'observation des prix sur le marché.

3.6. Analyse du prix d'une obligation par ses composantes

Dans cette partie du cours, le seul prix de l'obligation que nous aurons à traiter est son prix plein de coupon ; il sera donc nécessaire de reconstituer ce dernier en additionnant le coupon couru au cours en pied de coupon .

Ensuite, nous ferons des divisions et des soustractions et, à titre accessoire, nous serons amenés à établir des taux annuels équivalents.

Chacune de ses opérations est simple, le tout est de mener les calculs de façon ordonnée.

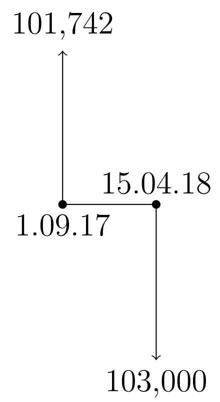
Soit trois obligations de même émetteur ayant les échéances, coupons et cours en pied de coupon au 1^{er} septembre 2017 suivants :

Nom	Échéance	Coupon	Cours
A	15.04.2018	3,00	100,60
B	15.04.2019	2,50	99,61
C	15.04.2020	2,00	97,53

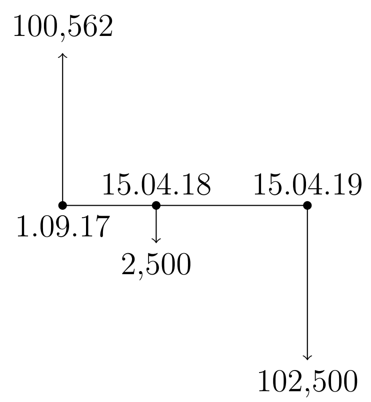
Au préalable, calculons les coupons courus des trois obligations au 1^{er} septembre 2017. 139 jours se sont écoulés depuis le dernier coupon et 365 jours séparent le dernier coupon du prochain coupon. Les coupons courus sont alors respectivement de 1,142, 0,952 et 0,762 et les prix plein de coupon 101,742, 100,562 et 98,292.

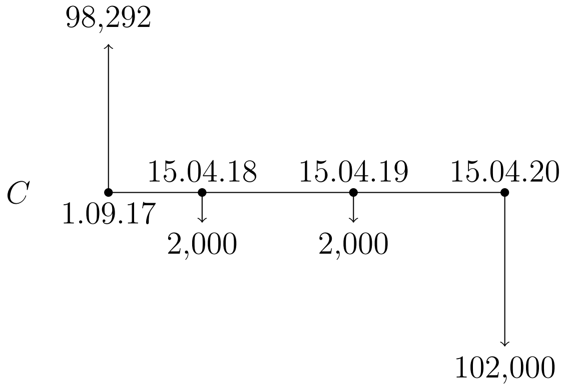
Nous avons donc les diagrammes de flux suivants :

A

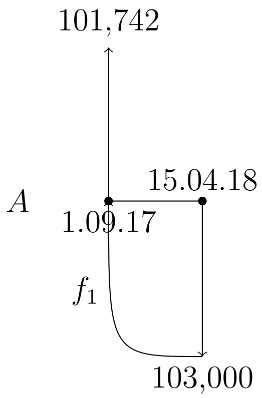


B





Au 1er septembre 2017, l'obligation A se comporte comme un zéro-coupon qui aurait comme prix 101,742 et serait remboursé à 103,000 le 15 avril 2018. Le prix du zéro-coupon équivalent de nominal 1 serait $101,742/103,000$, soit 0,987786..., que nous noterons f_1.

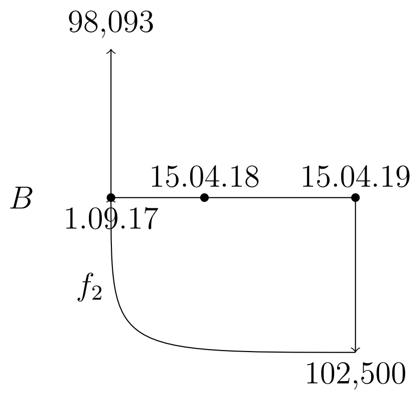


Pour obtenir ce prix, nous avons réalisé une homothétie de l'obligation A pour en normaliser le terme à 1.

Le ratio f_1 appliqué à une tombée le 15 avril 2018 du même émetteur donne la valeur de cette tombée au 1er septembre 2017.

Ainsi, nous pouvons estimer à $2,500 \cdot f_1$, soit à 2,469, la valeur au 1er septembre 2017 du coupon de 2,500 qui tombera le 15 avril 2018 pour l'obligation B. Nous en déduisons que la tombée de 102,500 le 15 avril 2019 a comme valeur au 1er septembre 2017, $101,562 - 2,469$, la valeur de l'obligation B diminuée de la valeur de la tombée intermédiaire, soit 98,093.

Au 1er septembre 2017, l'obligation B amputée de son coupon qui tombera le 15 avril 2018, se comporte comme un zéro-coupon qui aurait comme prix 98,093 et serait remboursé à 102,500 le 15 avril 2019. Le prix du zéro-coupon équivalent de nominal 1 serait $98,093/102,500$, soit 0,957000..., que nous noterons f_2.

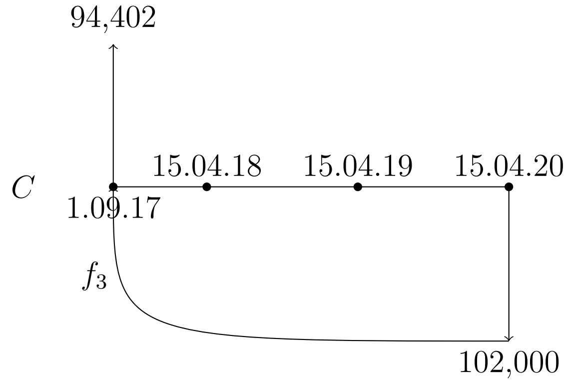


Pour obtenir ce prix, nous avons réalisé une combinaison linéaire des obligations A et B, d'une part pour éliminer le coupon intermédiaire de B, d'autre part pour en normaliser le terme à 1.

Le ratio f_2 appliqué à une tombée le 15 avril 2019 du même émetteur donne la valeur de cette tombée au 1er septembre 2017.

Ainsi pour l'obligation C, nous pouvons estimer à $2,000 \cdot f_1$, soit à 1,976, la valeur au 1er septembre 2017 du coupon de 2,000 qui tombera le 15 avril 2018 et à $2,000 \cdot f_2$, soit à 1,914, la valeur au 1er septembre 2017 du coupon de 2,000 qui tombera le 15 avril 2019. Nous en déduisons que la tombée de 102,000 le 15 avril 2020 a comme valeur au 1er septembre 2017, $98,093 - 1,976 - 1,914$, la valeur de l'obligation C diminuée de la valeur des tombées intermédiaires, soit 94,402.

Au 1er septembre 2017, l'obligation C amputée de ses coupons qui tomberont les 15 avril 2018 et 2019, se comporte comme un zéro-coupon qui aurait comme prix 94,402 et serait remboursé à 102,000 le 15 avril 2020. Le prix du zéro-coupon équivalent de nominal 1 serait $94,402/102,500$, soit 0,925514..., que nous noterons f_3.



Pour obtenir ce prix, nous avons réalisé une combinaison linéaire des obligations A, B et C, d'une part pour éliminer les coupons intermédiaires de C, d'autre part pour en normaliser le terme à 1.

Le ratio f_3 appliqué à une tombée le 15 avril 2020 du même émetteur donne la valeur de cette tombée au 1er septembre 2017.

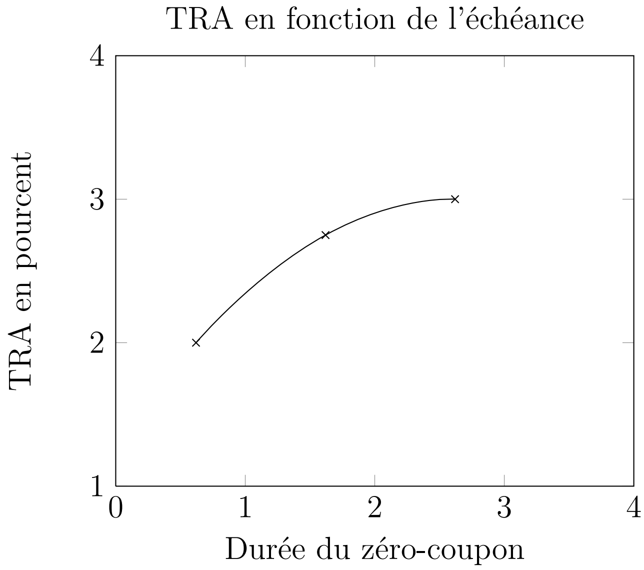
3.7. Construction de la courbe des zéros-coupons

Le 1er septembre 2017, les obligations A, B et C ont respectivement pour TRA 2,00 %, 2,74 % et 2,99 %.

De même, à partir de f_1, f_2 et f_3, nous obtenons la valeur des TRA au 1er septembre 2017 des zéros-coupons à 7 mois et demi, à 1 an et 7 mois et demi et à 2 ans et 7 mois et demi, 2,00 %, 2,75 % et 3,00 %, ces valeurs étant propres à l'émetteur considéré.

Nous remarquons que le TRA global de l'obligation C est distinct de ceux de ses trois tombées.

Pour l'émetteur considéré, nous pouvons établir une courbe des taux des zéro-coupons, à la date considérée :

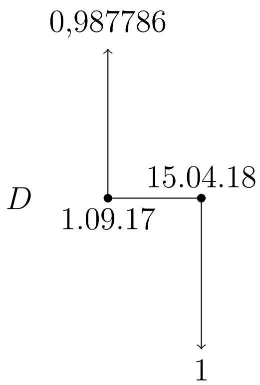


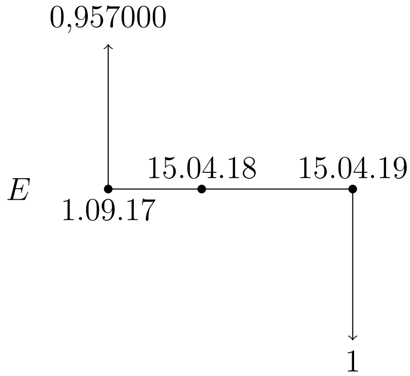
3.8. Taux *forward* implicites

La courbe des taux zéro-coupons est celles des taux *spot*, c'est à dire des taux immédiats.

Nous en déduisons des taux à venir, dits *forward*.

Par exemple, considérons les deux zéros-coupons, D et E, à 7 mois et demi et à 1 an et 7 mois et demi qui cotent respectivement 0,987786 et 0,957000.

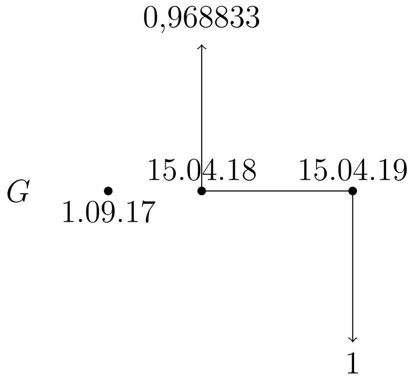




Par combinaison linéaire de D et de E, nous pouvant éliminer les jambes au 1er septembre 2017 tout en maintenant le terminal à 1 au 15 avril 2018. Cette combinaison linéaire correspond à l'achat d'une obligation E et la vente d'une quantité 0,957000/0,987786, soit 0,968833, de D.

Remarquons que cette opération n'est possible que si le marché des titres de l'émetteur considéré permet des arbitrages.

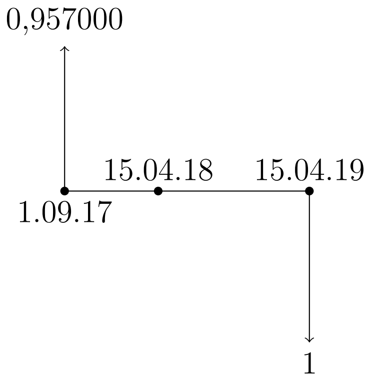
Nous obtenons ainsi un nouveau titre, noté G :



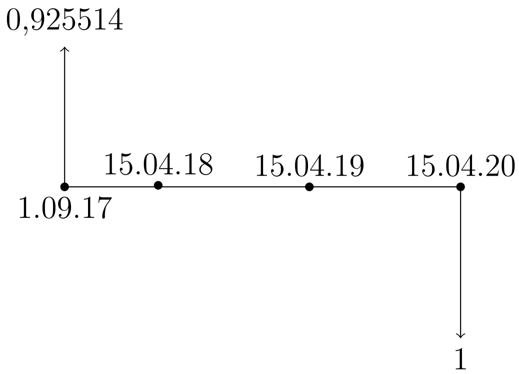
Ce titre offre un rendement de 3,22 % sur un an à partir du 15.04.2018. Ce taux est dénommé taux *forward* 1 an dans 7 mois et demi, apprécié au 1er septembre 2017.

De même en considérant les zéro-coupon E et F, ce dernier étant celui qui cote 0,925514 le 1er septembre 2017 pour une tombée unique de 1 le 15 avril 2020, nous pouvons obtenir par combinaison linéaire un titre, H, qui vaut 0,957000/0,987786, soit 0,967099,le 15 avril 2019 et qui est remboursé 1 le 15 avril 2020.

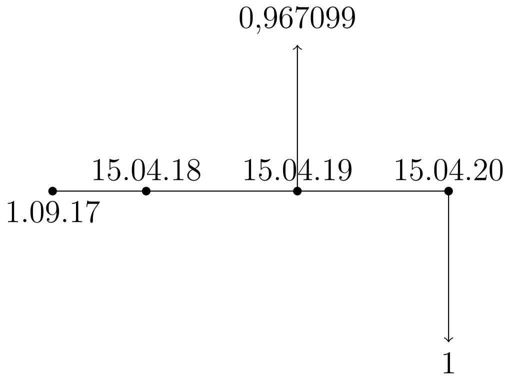
E



F



H



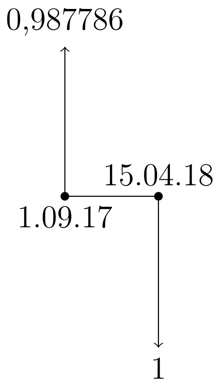
Ce titre offre un rendement de 3,40 % sur un an à partir du 15.04.2018. Ce taux est dénommé taux *forward* 1 an dans 1 an et 7 mois et demi, apprécié au 1er septembre 2017.

Quelle est la signification d'offrir un tel rendement ? En fait, nous pouvons décider aujourd'hui de placer demain une certaine somme et nous savons la somme que nous obtiendrons après-demain. Telle est la signification d'un taux *forward.* D'aucune manière, il ne s'agit d'une anticipation aujourd'hui des taux de demain.

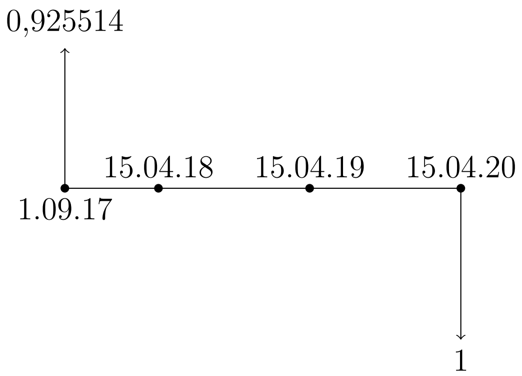
Enfin, nous pouvons à partit de D et de F obtenir un zéro-coupon, I, de prix 0,925514/0,987786, soit 0,936958, le 15 avril 2018 qui donne 1 le 15 avril 2020.

Ce titre offre un rendement de 6,73 % sur deux ans à partir du 15/04/2017, il a donc un TRA de 3,31 %. Ce taux est dénommé taux *forward* 2 ans dans 7 mois et demi, apprécié au 1er septembre 2017.

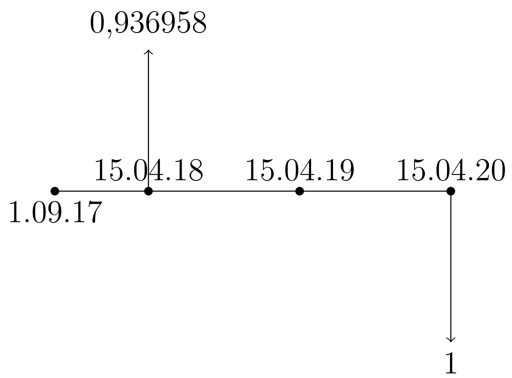
D



F

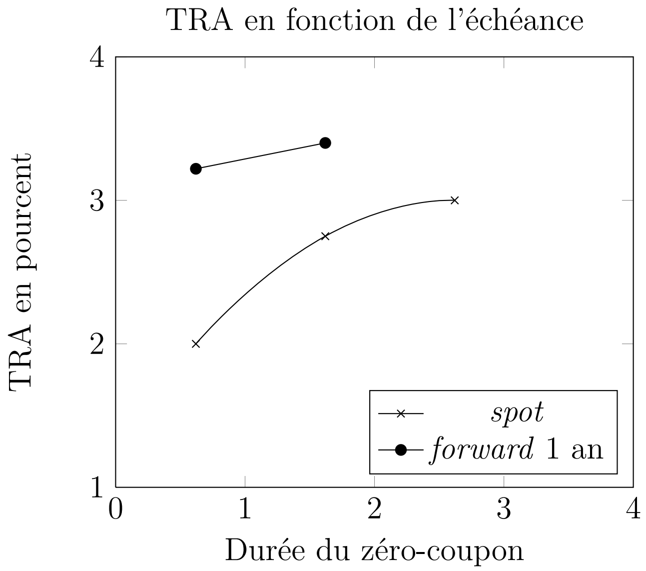


I



3.9. Comparaison des taux *spot* et des taux *forward*

Reprenons la courbe des taux des zéro-coupons précédente et portons dessus les taux *forward* que nous avons établis.



Avec la baisse des taux, certains investisseurs ont voulu profiter de la pentification de la courbe des taux *spot* pour obtenir de meilleures performances. Des banques leur ont proposé des produits structurés *ad hoc*, ces produits étant basés sur la vente de la partie courte de la courbe et l'achat simultané de la partie plus éloignée. Les investisseurs auraient obtenu le même résultat en vendant eux même la partie courte et en se plaçant plus long.

CHAPITRE 4

À LA DÉCOUVERTE DE NOUVEAUX HORIZONS

4.1. Fonctionnement d'un marché à terme

Un contrat à terme, *future* en anglais, est un engagement ferme de livraison d'un actif sous-jacent à une date à venir, à des conditions définies à l'avance. Le contrat à terme est standardisé et est négocié sur un marché organisé.

Une chambre de compensation se substitue en tant que contrepartie aux vendeurs et aux acheteurs. Elle centralise les risques de contrepartie, et pour garantir la bonne fin des opérations fixe une amplitude maximale de fluctuation quotidienne des cours, au-delà de laquelle le marché est automatiquement fermé et en exigeant de chaque intervenant un dépôt de garantie et un appel de marge quotidien dont le but est de reconstituer le dépôt de garantie si celui-ci a été entamé par une fluctuation contraire du marché.

Les contrats à terme sont standardisés par la chambre de compensation : quotité d'actif sous-jacent par contrat, qualité dudit sous-jacent, détails de la livraison...

4.2. Le contrat à terme sur l'obligation 10 ans de la République fédérale d'Allemagne

Eurex propose un contrat à terme sur l'obligation 10 ans de la République fédérale d'Allemagne, ce contrat a pour mémo FGBL et sera appelé par la suite contrat notionnel. Ce contrat a pour quatre échéances le premier jour ouvré à partir du 10 des mois de mars, juin, septembre et décembre.

Pour chaque échéance, Eurex fixe les obligations émises par la République fédérale d'Allemagne qui peuvent livrées, de deux à cinq de caractéristiques différentes. Mais les caractéristiques d'une obligation, montant du coupon, échéance, influent sur son prix. Eurex définit une valeur de livraison pour chacune des obligations qui dépend de ses caractéristiques.

Pour un engagement de E de notionnel et un prix du notionnel de N, le vendeur du contrat notionnel recevra $N \cdot M$ et devra livrer des obligations du gisement, le prix retenu pour une obligation étant $N \cdot FC+$ le coupon couru de l'obligation, FC, dit facteur de concordance, étant fixé par Eurex.

Les facteurs de concordance des obligations du gisement sont annoncés par Eurex avant le lancement des transactions sur l'échéance concernée. En pratique, le facteur de concordance d'une obligation est son prix en pied de coupon au taux de rendement actuariel de 6,00 % le jour de l'échéance du contrat pour un euro de nominal.

Le vendeur, en position le jour de l'échéance, a le choix de l'obligation à livrer, il choisira donc celle qui est la moins chère à livrer. Ce jour là, chacune des obligations du gisement a deux prix : son prix de marché, plein de coupon, et son prix de livraison, le vendeur choisira celle qui minimise le rapport entre ces deux prix.

Considérons maintenant l'obligation la moins chère le jour de l'échéance du notionnel. Si son prix de marché, plein de coupon, est supérieur à son prix de livraison, les arbitragistes vont la vendre sur le marché et acheter le notionnel pour se la voir livrer et feront un bénéfice. De même, Si son prix de marché est inférieur à son prix de livraison, les arbitragistes vont l'acheter et vendre le notionnel. Ainsi, le prix de marché de l'obligation la moins chère à livrer tend vers son prix de livraison.

Nous pouvons donc conclure que le notionnel reflète exactement le prix de l'obligation la moins chère à livrer tel qu'il peut être anticipé pour le jour de l'échéance du notionnel.

4.3. Étude d'un exemple

Pour l'échéance du 10 décembre 2017 du notionnel 10 ans sur l'OAT, 3 obligations sont livrables FR0011317783, FR0013200813 et FR0013250560 de coupons respectifs 2,75 %, 0,25 % et 1,00 % et d'échéances respectives 25.10.2027, 25.11.2026 et 25.05.2027. Elles ont respectivement des facteurs de concordance de 0,762986, 0,610350 et 0,647020.

Le 1er septembre 2017, elles cotent respectivement 119,890, 96,815 et 102,940 en pied de coupon. Quel prix vous semble raisonnable ce jour-là pour le notionnel susvisé ? À titre indicatif le zéro coupon émis par la République fédérale allemande à échéance le 15.12.2017 cotait 100,21 le même jour.

Au 1er septembre, 311, 280 et 99 jours se sont écoulés respectivement pour les trois obligations du gisement, avec 365 jours entre le denier et le prochain coupon. Les prix en plein de coupon sont donc respectivement de 122,233, 97,007 et 103,211 à cet date. Ces montants sont à multiplier par 0,99790, pour les projeter au 11 décembre, le 10 étant un dimanche, ce qui donne des prix respectifs de 119,240, 96,562 et 103,003, en déduisant les coupons qui tombent entre-temps les 25 octobre et le 25 novembre.

Le 11 décembre, respectivement 47, 16 et 200 jours se seront écoulés depuis le dernier coupon des obligations du gisement, avec 365 jours entre le denier et le prochain coupon. Les coupons courus sont donc respectivement de 0,354, 0,011 et 0,548.

Pour chacune des obligations du gisement, il existe un et un seul prix du notionnel, N, qui égalise son prix projeté au 11 décembre et son prix de livraison :

N =(Prix projeté-coupon couru au 11 décembre)/Facteur de concordance

Les notionnels d'équilibre sont respectivement 155,816, 158,189 et 158,349 pour les obligations FR0011317783, FR0013200813 et FR0013250560.

Il est facile de vérifier que la première obligation aurait un prix de livraison strictement inférieur à son prix de livraison avec la deuxième ou la troisième solution, c'est donc la moins chère à livrer et le notionnel d'équilibre est donc 155,800.

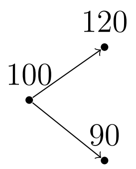
Pour mémoire, le prix de clôture du notionnel était de 155,900 le 1er septembre. Le prix que nous avons obtenu en est très proche.

4.4. Options sur un arbre binaire

Considérons deux actifs, un non risqué, NR, l'autre risqué, R.

Nous pouvons considérer que si l'actif non risqué vaut 1 aujourd'hui, il vaudra 1 demain, à un changement d'échelle des grandeurs près demain.

Quant à l'actif risqué, nous supposerons que sa valeur est 100 aujourd'hui et que demain il peut avoir deux valeurs 120 ou 90, ce que nous représentons par le schéma suivant :



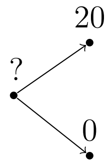
Soit le poids p qui en l'affectant à 120, première possibilité demain, et en affectant son complément à 1 à 90, deuxième possibilité demain, permet d'obtenir 100 aujourd'hui.

$100 = p \cdot 120 + (1 - p) \cdot 90$ et donc $p = 1/3$.

Le poids p est appelée « probabilité risque-neutre » que l'actif risqué vaille 120 demain. Ce genre de probabilité joue un rôle essentielle dans la finance stochastique.

Nous observons que, connaissant les prix possibles demain, à chaque prix aujourd'hui correspond une probabilité risque-neutre différente et réciproquement pour tout poids compris entre 0 et 1, correspond un prix aujourd'hui.

Intéressons nous maintenant à un actif particulier qui consiste à avoir le droit demain d'acheter l'actif risqué à 100. C'est une option d'achat qui vaudra 20 si l'actif risqué est à 120 demain et qui vaudra 0 s'il est à 90. Nous allons chercher son prix aujourd'hui.



Pour cela, nous allons essayer de répliquer le comportement de l'option par une combinaison linéaire de l'actif risqué et de l'actif non risqué.

Soit $\alpha \cdot R + \beta \cdot NR$ une telle pondération, regardons sa valeur dans chacune des hypothèses demain.

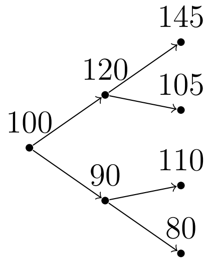
Hypothèse haute : $\alpha \cdot 120 + \beta = 20$

Hypothèse basse : $\alpha \cdot 90 + \beta = 0$

Par différence, nous obtenons $\alpha = 2/3$, puis $\beta = -60$ et nous pouvons évaluer alors l'option aujourd'hui à $\alpha \cdot 100 + \beta$, soit à $20/3$.

La combinaison linéaire $2/3 \cdot NR - 60 \cdot R$ est appelée « portefeuille répliquant » de l'option.

Supposons toujours que la valeur de l'actif risqué est de 100 aujourd'hui et que demain il peut avoir deux valeurs 120 ou 90, et qu'après demain, sa valeur puisse être 145 ou 105, s'il vaut 120 demain, et qu'elle puisse être 110 ou 80, s'il vaut 90 demain, ce que traduit le schéma suivant :

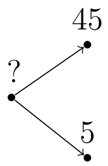


Qu'elle est la valeur aujourd'hui de l'option qui permet d'acheter l'actif risqué à 100 après-demain ?

Nous allons établir rétrospectivement cette valeur en calculant la valeur de l'option dans chacun des cas possibles demain.

Hypothèse haute demain

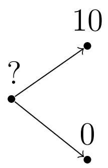
Nous avons à trouver le portefeuille répliquant correspondant au nœud suivant :



Le portefeuille solution consiste en $R - 100$ et l'option vaut 20.

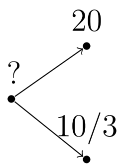
Hypothèse basse demain

Le nœud à résoudre est le suivant :



Le portefeuille solution consiste en $1/3 \cdot R - 80/3$ et l'option vaut 10/3.

Nous avons donc la valeur de l'option dans les deux hypothèses demain et nous cherchons le portefeuille répliquant qui permet d'obtenir ces valeurs.



Le portefeuille répliquant à la date d'aujourd'hui consiste en $5/9 \cdot R - 140/3$ et l'option vaut 80/9.

Regardons ce que devient ce portefeuille suivant ce qui se passe demain.

Si l'actif risqué vaut 120 demain, l'achat de $4/9 \cdot R$ pour un prix de $160/3$ permet de passer du portefeuille répliquant aujourd'hui à celui nécessaire sur le nœud considéré.

Si l'actif risqué vaut 90 demain, la vente de $2/9 \cdot R$ pour 20 permet de passer du portefeuille répliquant aujourd'hui à celui nécessaire sur le nœud considéré.

Le portefeuille répliquant initial s'ajuste selon les circonstances sans coût supplémentaire, il « s'autofinance ».

4.5. L'évaluation des flux au bilan prudentiel d'un assureur

La directive Solvabilité II demande aux assureurs d'établir un bilan dit prudentiel pour arrêter les fonds propres dont ils disposent et de calculer le montant de capital que leur activité requiert.

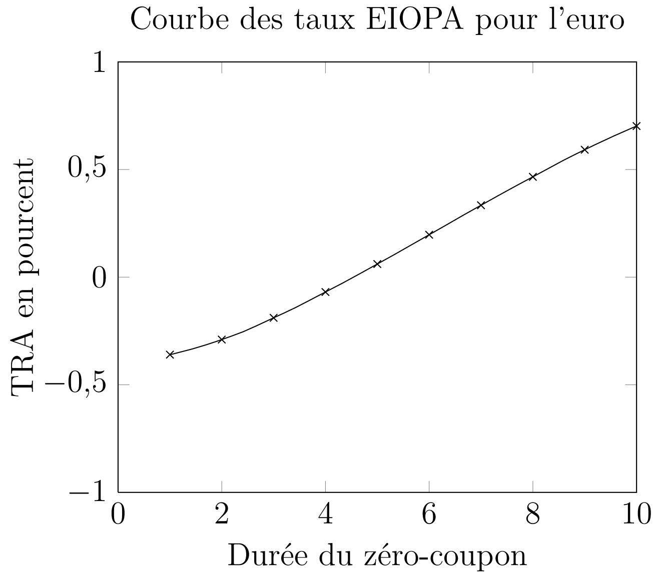
Les règles pour établir le bilan prudentiel sont définies dans la directive, son règlement délégué et également dans des spécifications mises à jour régulièrement par l'autorité européenne des assurances, connue sous son acronyme anglais, EIOPA.

En particulier, EIOPA publie des tables de zéro-coupons pour procéder à ces calculs.

Pour les besoins de l'arrêté du bilan prudentiel à une fin de mois donné, le public dispose pour chaque devise, d'une table de zéro-coupons, avec un pas d'une année sur plus de 100 ans.

Par exemple, le début de la table de ces zéro-coupons se présente ainsi pour les flux en euros au 31 août 2017 :

Terme	Central
1	−0,360 %
2	−0,290 %
3	−0,189 %
4	−0,069 %
5	0,061 %
6	0,197 %
7	0,334 %
8	0,466 %
9	0,592 %
10	0,702 %



Par la suite nous conviendrons que l'unité de calcul représente 1 €, *i.e.* les valeurs expriment des montants en euros.

Une tombée certaine de 100 dans cinq ans est ainsi évaluée à $100 \cdot (1 + 0,061\ \%)^{-5}$, soit à 99,70, et elle serait évaluée à $100 \cdot (1 + 0,197\ \%)^{-6}$, soit à 98,83, si elle intervenait un an plus tard.

Pour la même tombée à échéance entre 5 et 6 ans, si nous utilisons uniquement le taux à 5 ans, nous observerions une discontinuité juste avant 6 ans ; en effet en appliquant cette règle pour une durée de 6^-, nous obtiendrions $100 \cdot (1+0,061\ \%)^{-6^-}$, soit 99,63.

Pour les échéances entre 5 et 6 ans,nous allons donc réaliser une interpolation entre les TRA à 5 et 6 ans et, pour les besoins de ce cours, nous retiendrons l'interpolation linéaire pour laquelle une fonction dédiée existe sur la calculatrice.

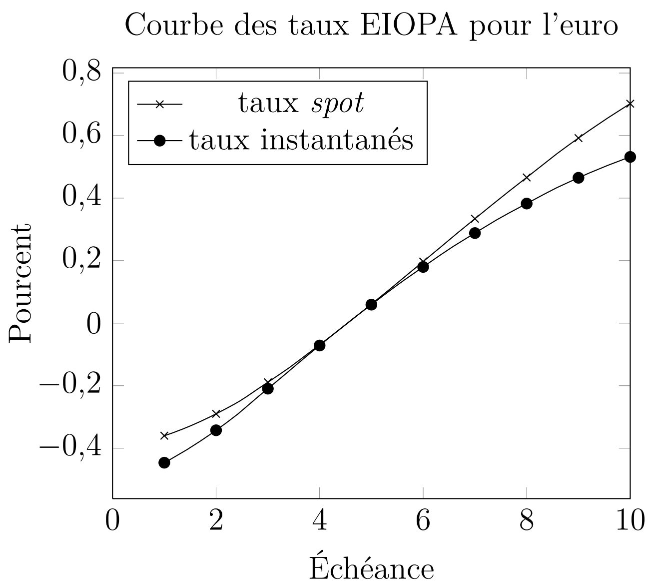
En pratique, pour une échéance dans 5 ans et 3 mois, nous obtiendrons un TRA de $3/4 \cdot 0,061\ \% + 1/4 \cdot 0,197\ \%$, soit 0,095 %, ce qui donne un prix de 99,50.

Avec la calculatrice, on procède ainsi :

$$
\begin{array}{rcccccc}
5 & \rightarrow & INPUT & & & & \\
0{,}061 & \rightarrow & \sum + & & & & \\
6 & \rightarrow & INPUT & & & & \\
0{,}197 & \rightarrow & \sum + & & & & \\
5{,}25 & \rightarrow & \hat{y}, m & \rightarrow & 0{,}95 & \rightarrow & I/YR \\
1 & \rightarrow & P/Y & & & & \\
5{,}25 & \rightarrow & N & & & & \\
100 & \rightarrow & -PV & & & & \\
0 & \rightarrow & PMT & & & & \\
99{,}50 & \leftarrow & FV & & & &
\end{array}
$$

4.6. Comparaison de zéro-coupons de même échéance

Plaçons nous à l'arrêté du 31.08.2017 ; nous disposons des zéro-coupons pour les flux en euros et des taux *forward* 1 an qui en découlent.



Prenons un zéro-coupon à échéance de 5 ans à cette date, noté O, qui cote 98,51 pour 100 de pair.

Si nous ramenons les 100 dans 5 ans en utilisant le taux du zéro-coupon de la courbe EIOPA de même échéance, nous obtenons 99,70. Ce montant s'écarte du prix de marché.

Si nous prenons le taux de référence pour modéliser le zéro-coupon, nous aurions une différence significative entre le prix modélisé et le prix de marché. Une telle situation s'appelle une fuite de modèle.

Nous allons donc ajuster le taux du zéro-coupon de référence de telle sorte à obtenir le prix de marché, cet ajustement étant propre au zéro-coupon O. Le prix de 98,51 correspondant à un TRA 0,300 %, il nous suffit de porter le taux du zéro-coupon de la courbe EIOPA à 5 ans à ce niveau alors qu'il est à 0,061 %.

Il existe une infinité de moyens de faire passer l'ordonnée du point d'abscisse 5 ans de 0,061 % à 0,300 %.

La première qui vienne à l'esprit est translation verticale du point : elle conduit à ajouter 0,300 % - 0,061 %, soit 0,239 %, au taux de référence.

Nous pouvons également agir sur le taux « instantané » j équivalent au taux i annuel qui se définit comme le logarithme népérien de $1 + i$.

Nous allons alors chercher à passer du taux instantané équivalent au taux de référence à celui qui permet d'obtenir le prix de marché du zéro-coupon O, c'est à dire le taux instantané équivalent au TRA de O.

Si nous retenons encore un déplacement vertical, le décalage solution, α, est la différence entre ln(1 + 0,300 %) et de ln(1 + 0,061 %), soit 0,238 %.

À ce stade, remarquons que si le taux de référence de cette échéance passait à 2,000 %, nous obtiendrions sensiblement des TRA pour O assez proches, respectivement 2,239 % et 2,243 % qui est le résultat de $\exp(1 + 2,000\ \% + 0,238\ \%) - 1$, pour chacune des méthodes, soit des prix respectifs de 89,52 et 89,50.

La réponse des deux modèles à une modification du taux de référence est quasiment la même.

Étudions maintenant une autre façon de passer de 0,061 % à 0,300 % en regardant un modèle multiplicatif : 3,915 fois 0,061 % donne 0,300 %. De même, pour les taux instantané, 3,909 fois $\ln(1 + 0,061\ \%)$ donne $\ln(1 + 0,300\ \%)$.

Si le taux de référence de l'échéance 5 ans passait à 2,000 %, nous obtiendrions des TRA assez différents pour O, 7,83 % et 9,15 %, soit des prix respectifs de 68,60 et 64,56 en écart de 6,25 %.

Cet écart est minime mais les valeurs obtenues s'éloignent nettement de celles du modèle additif.

Les réponses des modèles additif et multiplicatif à une modification du taux de référence sont significativement différentes.

Les praticiens utilisent une pondération des deux types de modèles en ajustant le poids de chacun selon l'échéance traitée et le niveau de TRA.

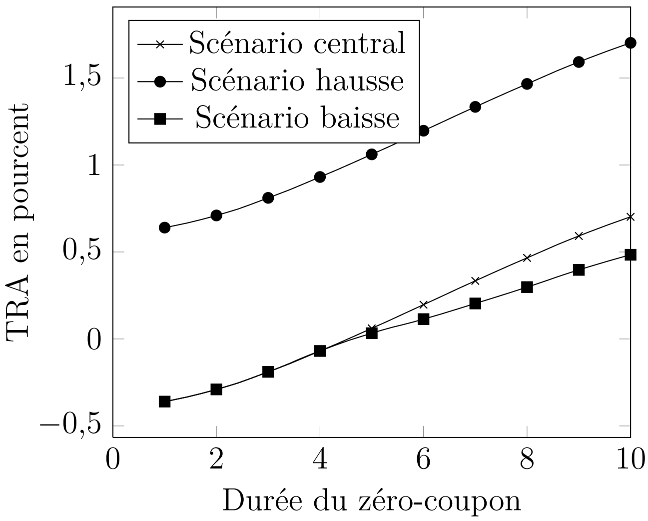
4.7. Les scénarios à la hausse et la baisse des taux d'EIOPA

Pour apprécier la pertinence de la modélisation que nous retiendrons pour les obligations, nous allons regarder des circonstances où nous aurons à les employer.

EIOPA publie outre les courbes des taux du scénario central qui permettent d'arrêter le bilan prudentiel, deux autres séries de courbes utilisées pour quantifier des chocs sur les courbes de taux, la première série correspondant à un scénario de hausse des taux, la seconde, à un scénario de baisse des taux.

Par exemple, le début de ces séries de zéro-coupons se présente ainsi pour les flux en euros au 31 août 2017 :

Terme	Central	Hausse	Baisse
1	−0,360 %	0,640 %	−0,360 %
2	−0,290 %	0,710 %	−0,290 %
3	−0,189 %	0,811 %	−0,189 %
4	−0,069 %	0,931 %	−0,069 %
5	0,061 %	1,061 %	0,033 %
6	0,197 %	1,197 %	0,114 %
7	0,334 %	1,334 %	0,204 %
8	0,466 %	1,466 %	0,298 %
9	0,592 %	1,592 %	0,397 %
10	0,702 %	1,702 %	0,484 %



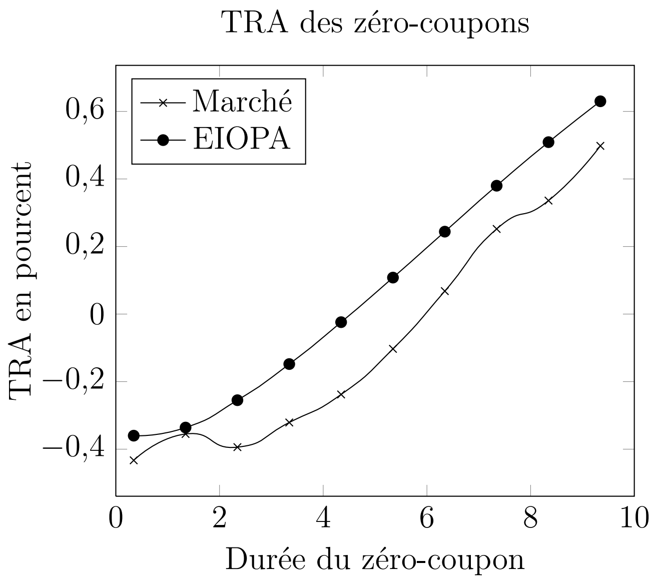
Pour fixer nos idées, voici les cours de clôture au 31.08.2017 d'une série de zéro-coupons émis par la République fédérale d'Allemagne sur la bourse de Francfort, avec les TRA correspondants :

Terme	Prix	TRA
04.01.18	100,15	−0,433 %
04.01.19	100,48	−0,355 %
04.01.20	100,93	−0,394 %
04.01.21	101,08	−0,321 %
04.01.22	101,04	−0,238 %
04.01.23	100,55	−0,103 %
04.01.24	99,57	0,068 %
04.01.25	98,17	0,252 %
04.01.26	97,24	0,336 %
04.01.27	95,46	0,498 %

Dans un premier temps, nous apprécions les TRA que donne le scénario central et nous en déduisons les paramètres de notre modèle, à savoir les écarts entre les TRA observés et les TRA ainsi obtenus :

Terme	TRA	Prix	Écart
04.01.18	−0,360 %	100,12	−0,073 %
04.01.19	−0,336 %	100,45	−0,020 %
04.01.20	−0,255 %	100,60	−0,139 %
04.01.21	−0,148 %	100,50	−0,173 %
04.01.22	−0,024 %	100,10	−0,214 %
04.01.23	0,108 %	99,42	−0,211 %
04.01.24	0,244 %	98,46	−0,176 %
04.01.25	0,380 %	97,26	−0,128 %
04.01.26	0,509 %	95,85	−0,174 %
04.01.27	0,630 %	94,30	−0,132 %

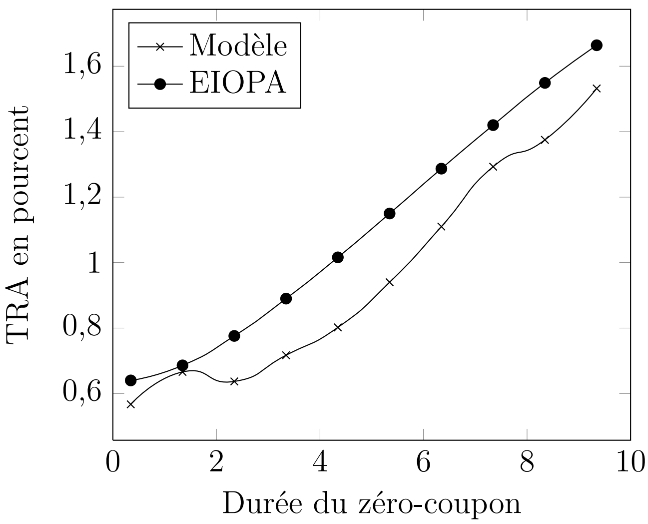
Pour l'échéance dans moins d'un an, nous avons retenu comme TRA EIOPA, le TRA EIOPA à un an.



Étudions l'impact du scénario à la hausse des taux. Pour cela, nous établissons les TRA des zéro-coupons avec la courbe de ce scénario que nous décalons chacun :

Terme	EIOPA		Modèle	
	TRA	Prix	TRA	Prix
04.01.18	0,640 %	99,78	0,567 %	99,81
04.01.19	0,686 %	99,08	0,666 %	99,11
04.01.20	0,776 %	98,20	0,637 %	98,52
04.01.21	0,890 %	97,08	0,717 %	97,64
04.01.22	1,016 %	95,70	0,802 %	96,59
04.01.23	1,150 %	94,07	0,940 %	95,12
04.01.24	1,287 %	92,21	1,110 %	93,23
04.01.25	1,420 %	90,16	1,293 %	91,00
04.01.26	1,549 %	87,96	1,375 %	89,23
04.01.27	1,664 %	85,71	1,532 %	86,75

TRA des zéro-coupons en cas de hausse des taux



Intéressons-nous maintenant à l'obligation O de la République allemande qui aurait un coupon de 2 et une échéance au 4 janvier 2027.

À partir des zéro-coupons allemands, nous déduisons son prix selon le scénario central, 114,03, soit un TRA de 0,461 %, et selon le scénario à la hausse, 104,38.

Nous pourrions calculer le prix de O selon les taux EIOPA du scénario central, ce qui donne 112,73, soit un TRA de 0,595 %, ce qui donne une différence de 0,134 % avec celui de marché.

Alors, nous pouvons appliquer ce différentiel uniforme aux TRA du scénario à la hausse EIOPA pour chaque échéance, calculer le prix correspondant et nous obtenons ainsi un prix de marché pour O dans le scénario à la hausse, 104,38. Dans le détail, les deux prix présentent un écart de $2.4 \cdot 10^5$.

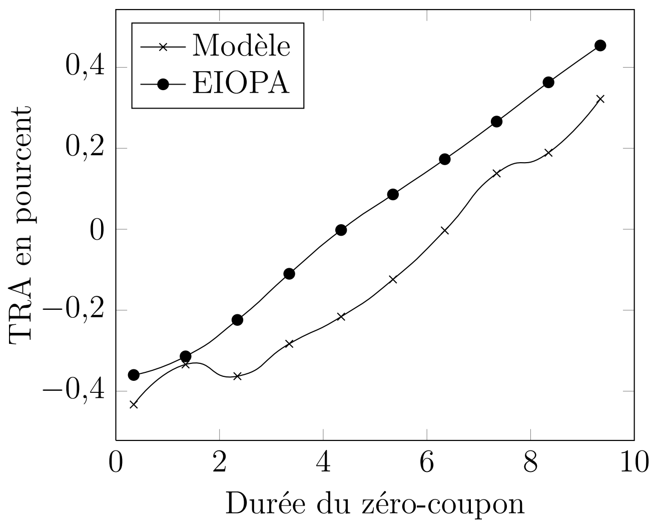
Procédons aux mêmes calculs pour des obligations de coupons 1, 3, 4 et 5 :

Coupon	Marché	1^{re} méthode	2^e méthode	Écart
1	104,75	95,57	95,57	$-1{,}35 \cdot 10^{-5}$
2	114,04	104,38	104,38	$-2{,}41 \cdot 10^{-5}$
3	123,34	113,20	113,19	$-3{,}26 \cdot 10^{-5}$
4	132,63	122,01	122,01	$-3{,}94 \cdot 10^{-5}$
5	141,92	130,83	130,82	$-4{,}49 \cdot 10^{-5}$

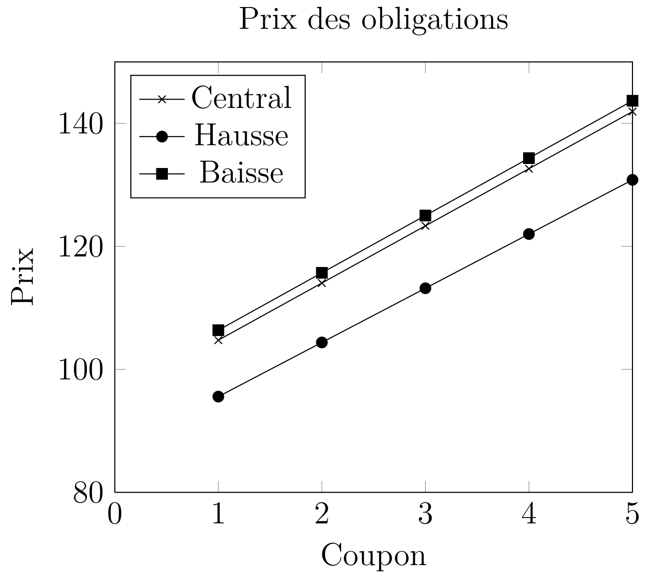
Les prix obtenus par les deux méthodes sont pratiquement les mêmes ; pour une obligation appliquer le différentiel de TRA entre son prix de marché et son prix selon la courbe EIOPA centrale aux TRA du scénario à la hausse donne une très bonne approximation du prix de l'obligation dans le scénario à la hausse.

Nous pouvons mener les mêmes travaux sur le scénario à la baisse.

TRA des zéro-coupons en cas de baisse des taux



Nous obtenons alors les cours suivants pour les obligations avec coupons dans le scénario à la baisse, en utilisant cette deuxième méthode :



4.8. Le capital de solvabilité requis pour le risque de taux

Considérons un assureur qui, au 31 août 2017, détient pour 100 de nominal du zéro-coupon allemand à échéance du 4 janvier 2027 qui cote 95,46 et qui est tenu de verser 100 à la même échéance.

Nous avons établi la valeur du zéro-coupon dans le cas d'une hausse des taux selon le scénario EIOPA, 86,75, et d'une baisse des taux selon le scénario EIOPA, 97,04.

Pour cela, nous avons modélisé le comportement du zéro-coupon au regard du taux EIOPA central à échéance du 4 janvier 2027.

Le flux certain de 100 au 4 janvier 2027 peut être valorisé le 31 août 2017 à respectivement 94,30, 85,71 et 95,86 selon les scénarios central, à la hausse et à la baisse.

Nous en déduisons que la situation nette de l'assureur au 31 août 2017 est de 1,16, 1,04 et 1,18 selon que nous retenions respectivement les scénarios central, à la hausse et à la baisse.

La situation nette enregistrée au bilan prudentiel sera 1,16 et serait diminuée de 0,12 dans l'hypothèse du scénario à la baisse des taux et augmentée de 0,02 dans l'hypothèse du scénario à la hausse des taux.

Le capital de solvabilité requis pour le risque de taux sera la plus grande variation à la baisse observée de la situation nette lorsque sont considérés successivement le scénario à la hausse et le scénario à la baisse, sans que cette exigence puisse être négative.

Dans le cas d'espèce, le capital de solvabilité requis pour le risque de taux est donc 0,12.

CHAPITRE 5

ÉCHAUFFEMENTS

5.1. Emprunt Socram

Un emprunt de 10 000 € est remboursable en 48 mensualités constantes de 224,86 € à terme échu. L'emprunt est consenti sans frais de dossier.

Calculer le TAEG du prêt en considérant qu'il inclut le coût d'immobilisation d'un « fonds mutuel de garantie » (2 % du montant du prêt compris dans les mensualités et remboursables par le prêteur dès la bonne fin du crédit).

*

* *

$$\begin{array}{rcl} 10\ 000 & \rightarrow & -PV \\ -200 & \rightarrow & FV \\ 224,86 & \rightarrow & PMT \\ 48 & \rightarrow & N \\ END & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \\ 2,91 & \leftarrow & I/YR \end{array}$$

Le taux affiché par le moteur est le taux annuel proportionnel au taux mensuel d'équilibre. Le taux annuel équivalent est obtenu par conversion :

$$\begin{array}{rcl} 12 & \rightarrow & P/YR \\ \text{2,91} & \rightarrow & NOM \\ \text{2,94} & \leftarrow & EFF \end{array}$$

Le prêt a pour TAEG 2,94 %.

5.2. OAT *versus* OATi

L'OAT 0,5 % d'échéance 25 mai 2025 et l'OATi 0,1 % d'échéance 1[er] mars 2025 indexée sur l'inflation cotent respectivement le 27 janvier 2016 98,48 et 103,24.

Quelle hypothèse d'inflation uniforme permet d'égaliser leur TRA ?

*

* *

La calculatrice financière dispose d'un moteur permettant de, connaissant l'un, déterminer le TRA ou le prix en pied de coupon d'une obligation.

En renseignant les dates dans le format jj.mmaaaa, en retenant l'année civile et avec un coupon annuel, on détermine le TRA de chacune des obligations.

$$\begin{array}{rcl}
98{,}48 & \rightarrow & PRICE \\
0{,}50 & \rightarrow & CPN\% \\
25{,}052025 & \rightarrow & \text{MatDate} \\
27{,}012016 & \rightarrow & SetDate \\
100 & \rightarrow & \text{CALL} \\
0{,}67 & \leftarrow & YTM
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
103{,}24 & \rightarrow & PRICE \\
1{,}00 & \rightarrow & CPN\% \\
1{,}032025 & \rightarrow & \text{MatDate} \\
27{,}012016 & \rightarrow & SetDate \\
100 & \rightarrow & \text{CALL} \\
\text{-}0{,}25 & \leftarrow & YTM
\end{array}$$

En considérant le taux i d'inflation, le flux F de l'OTAi qui intervient dans t années vaut $F \cdot (1+i)^t$ exprimé en euro et l'obligation qui livrerait ces sommes indexées fournirait un TRA égal à $(1+j)/(1+i)$, où j désigne le TRA de l'OATi.

Ce résultat serait celui de l'OAT, à très peu près puisque ce titre a pratiquement la même échéance que l'OATi et donc de l'obligation imaginée.

Le taux d'inflation future qui donne le même rendement aux deux obligations est donc $(1,0067)/(0,9975) - 1$, soit 0,92 %.

5.3. Couverture d'un régime de retraite

Φ vaut 100 à 4,5 % et 90 à 4,2 %.

Qu'est Φ ?

*

* *

Φ se comporte comme l'inverse d'un prix.

Supposons que l'objet sous-jacent soit constitué d'une seule tombée intervenant dans n années. Nous avons $(1,045)^{-n}/(1,042)^{-n} = 90/100$, d'où $n = -\ln(0,900)/(\ln(1,045) - \ln(1,042))$, soit $n = 36,7$.

Le sous-jacent ne peut être une annuité infinie puisque sa valeur ramenée au taux i est $1/i$, ce qui donnerait comme rapport des valeurs $4,20/4,50$, soit 0,964 et non pas 0,900 pour les taux considérés.

En introduisant un différé n avant le service de l'annuité infinie, on obtient un rapport des valeurs ramenées égal à $4,50/4,20 * (1,045)^{-n}/(1,042)^{-n}$. Le différé $n = -\ln(0,900 * 4,50/4,20)/(\ln(1,045) - \ln(1,042))$, soit 12,6, permet d'obtenir le ration 0,900.

Enfin, pendant la période de service, introduisons un taux instantané $\mu = 1,0$ % de cessation du service des annuités. La valeur ramenée au taux i de l'annuité infinie ainsi défalquée est alors $1/((1+i) * \exp(\mu) - 1)$ (cf. début du corrigé de Risque de défaillance d'un emprunteur, page 78).

Ainsi, le rapport des valeurs ramenées est égal à $(1,045 * \exp(0,010) - 1)/(1,042 * \exp(0,010) - 1) * (1,045)^{-n}/(1,042)^{-n}$, ce qui donne comme différé n=17,1 années.

Avec ces seules caractéristiques, « Φ vaut 100 à 4,5 % et 90 à 4,2 % », nous avons trouvé que Φ se comporte comme un régime de retraite différée.

Et c'est en s'appuyant sur ces deux métriques, qu'un grand actuaire, Alain Tosetti (1944-2003), a démontré qu'un régime de retraite était en difficulté puisqu'il avait juste assez d'argent en escomptant à 4,5 % et qu'il en manquait 10 % à 4,2 %, ce qui était à l'époque un taux d'escompte élevé.

Finalement, à partir de ces deux métriques, nous avons pu appréhender la géométrie de l'objet sous-jacent.

5.4. Comparaison d'emprunts de même durée

Deux emprunts obligataires ont été émis à la même date par deux organismes comparables en termes de solidité financière. L'émission A a une durée de 7 3/4 ans et délivre un coupon annuel de 6 %, l'émission B a la même durée avec un coupon annuel de 5 %.

1. L'emprunt A a été émis à 101 % de son nominal.

a) quel est le taux de rendement actuariel à l'émission de A ?

b) quel doit-être le prix d'émission de B pour obtenir le même taux de rendement actuariel que A ?

2. En réalité, l'emprunt B a été émis à 95 %.

Deux ans et trois mois après ces émissions, le taux de marché pour les obligations de ces émetteurs à même échéance est égal à 5,5 %.

a) quel est le prix de marché des obligations A et B à ce moment-là ?

b) quel est, pour chacune des obligations A et B, le taux de rendement obtenu par le souscripteur d'origine qui les revend sur le marché à ce moment-là ?

3. Les émetteurs des emprunts A et B ont la faculté de rembourser par anticipation les obligations immédiatement après paiements des cinquièmes coupons annuels.

Pour les deux émissions, le prix de remboursement en cas d'une telle anticipation a été fixé à l'escompte à 7 % annuel des flux qui auraient eu lieu après paiements des cinquièmes coupons annuels en l'absence de remboursement anticipé.

a) quels sont pour chacune des émissions, le prix de remboursement anticipé ?

b) si les émetteurs exercent leur faculté de remboursement après paiements des cinquièmes coupons annuels, quel est, dans chacun des cas, le taux de rendement obtenu par le souscripteur d'origine ?

*

*   *

1 a) On approxime le taux de rendement actuariel avec le moteur à flux fixes :

$$
\begin{array}{rcl}
101,00 & \rightarrow & -PV \\
100 & \rightarrow & FV \\
6 & \rightarrow & PMT \\
7,75 & \rightarrow & N \\
END & \rightarrow & Beg/End \\
1 & \rightarrow & P/YR \\
5,84 & \leftarrow & I/YR
\end{array}
$$

1 b) Pour calculer le prix de l'obligation B à ce taux, on établit le prix pour une obligation de même coupon de durée 8 ans et on projette ce prix sur trois mois ; on obtient un prix en pied de coupon de 94,88.

2 a) Les prix de marché sont respectivement 102,28 et 97,65.

2 b) Considérons l'équation d'équilibre où P_a est le prix d'achat, P_v, le prix de vente, C, le montant du coupon, α, la fraction d'année entre la date d'achat et le précédent coupon, β, la fraction d'année entre la date de vente et le précédent coupon et n le nombre de coupons entre la date d'achat et la date de vente :

$$P_a + \alpha C = \sum_{k=1}^{n} C(1+i)^{-(k-\alpha)} + (P_v + \beta C)(1+i)^{-(n-\alpha+\beta)}$$

$$P_a + \alpha C = C((1+i)^{\alpha} - (1+i)^{-(n-\alpha)})/i + (P_v + \beta C)(1+i)^{-(n-\alpha+\beta)}$$

On remarque que $\alpha \approx ((1+i)^{\alpha} - 1)/i$ et que $\beta \approx ((1+i)^{\beta} - 1)/i$. En subsituant ces valeurs dans l'équation précédente on obtient :

$$P_a \approx C(1 - (1+i)^{-(n-\alpha+\beta)})/i + P_v(1+i)^{-(n-\alpha+\beta)}$$

On peut donc utiliser le moteur à flux fixes ou le moteur obligataire en prenant comme prix net, le prix en pied de coupon à l'achat, comme prix de remboursement, le prix en pied de coupon à la vente et comme durée résiduelle, la durée entre l'achat et la vente. Dans le cas étudié, on obtient alors comme taux de rendement 6,48 % et 6,45 %.

3 a) Les prix de remboursement sont 97,38 et 94,75

3 b) En cas de remboursement anticipé, les taux de rendement sont respectivement 5,26 % et 5,21 %

5.5. Duration d'une obligation

On considère à une date donnée, t_0, une obligation de coupon annuel C et qui rembourse R en $n - \alpha$, après n coupons et où α est la durée écoulée depuis le dernier coupon.

En t_0, le prix en pied de coupon de l'obligation est noté P, son coupon couru est αC et son TRA est noté i.

$$P + \alpha C = \sum_{k=1}^{n} C(1+i)^{-(k-\alpha)} + R(1+i)^{-(n-\alpha)}$$

Par une vue de l'esprit, on peut décomposer le prix de l'obligation en la somme du prix de ses composants, chacune des tombées étant ramenées au taux i. Ainsi le k^e coupon aurait pour valeur $C \times (1+i)^{-(k-\alpha)}$ et le remboursement $R \times (1+i)^{-(n-\alpha)}$.

La somme des durées de chaque tombée de l'obligation, pondérée par le prix des tombées ramenées au taux de rendement actuariel de l'obligation, le tout divisé par le prix de l'obligation, s'appelle la duration de l'obligation.

En notant D la duration, on obtient :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-\alpha) \times C(1+i)^{-(k-\alpha)} + (n-\alpha) \times (1+i)^{-(n-\alpha)}}{P + \alpha C}$$

Deux méthodes peuvent être mises en oeuvre pour calculer la duration si votre moteur financier ne vous en propose pas le résultat direct.

La première consiste à remarquer que la fonction qui au TRA associe le prix plein a pour dérivée logaritmique l'opposée de la duration divisée par $1+i$, cette quantité s'appelle la duration modifiée. On rappelle que la dérivée logaritmique d'une fonction est la dérivée de la fonction divisée par la fonction.

En pratique avec le moteur financier, pour un prix donné on détermine le TRA et on augment celui-ci d'une quantité ϵ, 10^{-8} par exemple, et on divise la différence entre l'ancienu prix et le nouveau par le différentiel de taux pour obtenir une très très bonne approximation de la duration modifiée.

La deuxième consiste à évaluer la quantité $X = \sum_{k=1}^{n}(k-\alpha) \times (1+i)^{-(k-\alpha)}$ en reprennat la méthode d'évaluation de l'annuité en progression arithmétique. On observe que $(1+i)X = \sum_{k=1}^{n}(k-\alpha) \times (1+i)^{-(k-\alpha-1)}$ et on obtient donc par différence :

$$\begin{aligned} iX &= -\alpha(1+i)^{\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{-(k-\alpha)} - (n-\alpha) \times (1+i)^{-(n-\alpha)} \\ &= (1+i)^{\alpha} \times (-\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{-k} - (n-\alpha)(1+i)^{-n}) \end{aligned}$$

On reconnait à droite une annuité d'avance de terme 1 avec un paiement final de $-(n-\alpha)$, cette annuité étant corrigée de α

<u>Application numérique</u> : Soit une obligation de coupon 2,50 % et d'échéance le 15 octobre 2035. Son cours en pied de coupon le 28 février 2023 est de 98,54. Calculer sa duration.

*

* *

On calcule le TRA de l'obligation et on le met dans les regsitres I/YR et $STO\,0$:

$$\begin{array}{rcl} 98{,}54 & \to & PRICE \\ 2{,}50 & \to & CPN\% \\ 15{,}102035 & \to & MatDate \\ 28{,}022023 & \to & SetDate \\ 100 & \to & CALL \\ YTM & \to & 2{,}6367\ldots \quad \to \quad I/YR \quad \to \quad STO\,0 \end{array}$$

On récupère le coupon couru que l'on place dans $STO\,1$ et l'on détermine α, la fraction d'année écoulée depuis le dernier coupon que l'on place dans le registre $STO\,2$; on place le prix plein de l'obligation dans le registre $STO\,1$.

$$\begin{array}{rcll} AccInt & \to & 0{,}9315\ldots & \to \ STO\,1 \\ RCL\,1/2,50 & = & 0{,}3726\ldots & \to \ STO\,2 \\ 98,54 + RCL\,1 & = & 99{,}4715\ldots & \to \ STO\,1 \end{array}$$

Pour apprécier par la suite la duration des coupons, on calcul le prix ramené au TRA du seul remboursement et des coupons que l'on place dans les registres $STO\,3$ et $STO\,4$.

$$\begin{array}{rcll} 0 & \to & CPN\% & \\ PRICE & \to & 71{,}9905\ldots & \to \ STO\,3 \\ RCL\,1 - RCL\,3 & = & 27{,}4810\ldots & \to \ STO\,4 \end{array}$$

Pour la méthode de la dérivée, on modifiele TRA de ϵ, 10^{-8}, on augmente donc YTM de 10^{-6}, les registres de taux d'intérêt s'exprimant en pourcent. On obtient un prix en pied de coupon de l'obligation à ce taux. On regarde l'écart au prix en pied de coupon initial, on divise par ϵ, puis par le prix plein de l'obligation. On a alors la duration modifiée, 10,59 et enfin la duraction 10,87.

$$\begin{array}{rcllll} 2{,}50 & \to & CPN & & & \\ RCL\,0 + 10^{-6} & \to & YTM & & & \\ PRICE & \to & 98{,}53998947\ldots \to & STO\,5 & & \\ 98{,}54 \text{ - } RCL\,5 & \to & 0{,}0000105341\ldots & & \to & STO\,5 \\ RCL\,5/10^{-8} & \to & 1053{,}41\ldots & & \to & STO\,5 \\ RCL\,5/RCL\,1 & \to & 10{,}590\ldots & & \to & STO\,5 \\ RCL\,5 \times (1 + RCL\,0/100) & \to & 10{,}869\ldots & & \to & STO\,5 \end{array}$$

Pour la méthode directe, on commence par calculer au TRA de l'obligation une annuité unitaire d'avance de durée n, 13, et de flux final $-(n-\alpha), -(13 - RCL\,2)$.

$$\begin{array}{rcl}
13 - RCL\,2 & \to & STO\,6 \\
1 & \to & P/YR \\
\text{BEGIN} & \to & Beg/End \\
1 & \to & PMT \\
13 & \to & N \\
-RCL\,6 & \to & FV \\
RCL\,0 & \to & I/YR \\
-PV & \to & 2{,}1706\ldots \quad \to \quad STO\,7
\end{array}$$

On fait la différence entre ce résultat et α et cette différence est projetée au TRA de l'obligation sur une durée α, puis en divisant par le TRA on obtient $\sum_{k=1}^{n}(k-\alpha)\cdot(1+i)^{-(k-\alpha)}$.

$$\begin{array}{rcl}
RCL\,7 - RCL\,2 & \to & 1{,}7980\ldots \quad \to \quad STO\,7 \\
0 & \to & PMT \\
RCL\,2 & \to & N \\
RCL\,7 & \to & -PV \\
FV & \to & 1{,}8155\ldots \quad \to \quad STO\,7 \\
RCL\,7/RCL\,0\cdot 100 & \to & 68{,}8535\ldots \quad \to \quad STO\,7
\end{array}$$

On obtient la duration au TRA des coupons, 6,26, en multipliant ce résultat par le montant du coupon et en divisant ceci par le prix des coupons au TRA. La duration de l'obligation au TRA est la pondération de la duration des coupons par leur prix et de la duration du remboursement, $n-\alpha$, par son prix.

$$\begin{array}{rcl}
C\times RCL\,7 + RCL\,3\times RCL\,6 & \to & 1081{,}2\ldots \quad \to \quad STO\,7 \\
RCL\,7/RCL\,1 & \to & 10{,}8693\ldots \quad \to \quad STO\,7
\end{array}$$

La méthode de la dérivée présente un écart relatif est de -6,49e-08 par rapport au résultat exact que l'on vient de calculer en utilisant le tableur.

CHAPITRE 6

VAGABONDAGES

6.1. Investissement locatif

Alain souhaite acheter un bien immobilier pour le donner en location. Le bien coûtant 250 000 €, Alain souhaite apporter 100 000 € et contracter pour le solde un prêt d'une durée de vingt ans, remboursable par mensualités constantes à terme échu, à un TAEG de 3,60 % ; le prêt supporte 1 % de frais de dossier.

1) Calculer le montant de la mensualité de remboursement.

2) Alain estime que dans vingt ans la valeur probable du bien sera de 300 000 €. En escomptant au taux annuel de 3,30 %, à combien correspond aujourd'hui cette somme ?

3) Quelle est la contre-valeur aujourd'hui des mensualités en les escomptant à un taux équivalent à 3,30 % annuel ?

Alain envisage de louer le bien immobilier, les loyers étant perçus en début de mois. Le loyer est révisé à chaque anniversaire du bail.

4) Quelle est la contre-valeur en début d'année de douze loyers de 500 €, les loyers étant perçus en début de mois, en escomptant les loyers à un taux équivalent à 3,30 % annuel ? Cette contre-valeur sera appelée loyer annuel équivalent.

5) Montrer que la contre-valeur des loyers sur vingt ans, en escomptant les loyers à un taux équivalent à 4 % annuel, est égale à l'escompte à 3,30 % des vingt loyers annuels équivalents correspondant aux niveaux successifs de loyer.

6) Alain estime que les loyers augmenteront de 1,00 % chaque anniversaire du bail. Pour un loyer mensuel initial de 500 €, quelle est la contre-valeur aujourd'hui des loyers sur vingt ans, en les escomptant à un taux équivalent à 3,30 % annuel ?

7) Si Alain finance la totalité de l'achat, quel loyer initial permet à Alain d'obtenir une rentabilité de 3,30 % sur vingt ans, les loyers étant perçus en début de mois,

en supposant que le loyer augmente de 1,00 % à chaque anniversaire du bail et que dans vingt ans la valeur du bien sera de 300 000 € ?

8) Si Alain recourt à l'emprunt décrit *supra*, quel loyer initial permet à Alain d'obtenir une rentabilité de 3,30 % sur vingt ans, les loyers étant perçus en début de mois, en supposant que le loyer augmente de 1,00 % à chaque anniversaire du bail et que dans vingt ans la valeur du bien sera de 300 000 € ?

*

* *

1) à 3) Les mensualités sont à 864,44 € ; à 3,30 %, elles valent 152 391,32 € et 300 000 € dans vingt ans, 156 716,54 €.

4) et 6) Douze loyers mensuels d'avance valent à 3,30 % 5 911,63 € et ceci pendant vingt ans avec une augmentation annuelle de 1,00 % donne 96 270,24 € à 3,30 % en utilsant un taux de 2,28... % égal à $1,0330/1,10100 - 1$.

7) On détermine au taux de 2,28... % précédent la contre-valeur des douze loyers initiaux en cherchant le paiement d'avance sur vingt ans qui donne la valeur initiale du bien diminuée de sa valeur attendue ramenée à 3,30 %, soit 250 000 € - 156 716,54 €. On trouve 5 728,23 € qui par une règle de trois donne un loyer initial de 484,49 € en comparant au loyer de 500 € qui annuellement correspond lui à 5 911,63 € .

8) On détermine au taux de 2,28... % la contre-valeur des douze loyers initiaux en cherchant le paiement d'avance sur vingt ans qui donne l'apport initial augmenté de la valeur des mensualités ramenées à 3,30 % et diminué de la valeur attendue du bien ramenée à 3,30 %, soit 100 000 € + 152 391,32 € - 156 716,54 €. On trouve 6 008,86 € qui par une règle de trois donne un loyer initial de 508,22 €.

6.2. Option de remboursement d'un prêt en devises

La Lambic propose à Benoît de lui prêter trois cents mille euros pour l'achat d'une maison en contrepartie de deux cents quarante mensualités à terme échu de montant constant.

A

Les mensualités sont libellées en euros.

a) Les sommes prêtées portent intérêt à un et demi pour mille par mois.

Arrêter le montant des mensualités.

b) La Lambic retient mille euros de frais, les mensualités sont de mille cinq cents euros et la première intervient trois quinzaines après la remise des fonds.

Déterminer le taux annuel effectif global du prêt.

Chaque mensualité comprend des frais se décomposant, d'une part, en intérêts, d'autre part, pour vingt euros en d'autres frais. Les intérêts sont arrêtés sur la base d'un taux nominal annuel constant. Aucune pénalité en cas de remboursement anticipé n'est appliquée.

Déterminer le capital libérant le prêt après paiement de la soixantième mensualité.

B

Les mensualités sont libellées en francs suisses et, lors de la conclusion du prêt, le franc suisse vaut quatre-vingt centimes.

a) Les sommes prêtées portent intérêt à trois-quarts pour mille par mois.

Arrêter le montant des mensualités.

b) La Lambic retient mille euros de frais, les mensualités sont de mille sept cents francs suisses et la première intervient trois quinzaines après la remise des fonds.

Déterminer le taux annuel effectif global du prêt.

Chaque mensualité comprend des frais se décomposant, d'une part, en intérêts, d'autre part, pour trente francs suisses en d'autres frais. Les intérêts sont arrêtés sur la base d'un taux nominal annuel constant. Aucune pénalité en cas de remboursement anticipé n'est appliquée.

Déterminer le capital libérant le prêt après paiement de la soixantième mensualité.

Au moment de l'offre, Benoît estime seuls possibles deux scénarios pour la parité du franc suisse contre l'euro sur la durée du prêt, l'un où le franc suisse reste à quatre-vingt centimes jusqu'à la soixantième mensualité puis passe à soixante-quinze centimes., l'autre où le franc suisse reste à quatre-vingt centimes jusqu'à la soixantième mensualité puis passe à un euro.

Déterminer à combien Benoît estime, au moment de l'offre, la faculté de se libérer du prêt en versant deux cent cinquante mille euros à La Lambic après paiement de la soixantième mensualité.

*

*   *

A

a) La mensualité est de 1 489,40 €.

b) Le moteur financier nous donne une approximation du taux nominal solution par la méthode de la mensualité à échoir. Nous convertissons ce taux en taux effectif et le TAEG est 1,92 %.

La mensualité financière est 1 480 €. Nous pouvons approcher le taux débiteur mensuel en utilisant la méthode de la mensualité à échoir et nous obtenons un taux débiteur de 0,144… %.

Le montant restant dû après la 60^{e} mensualité est la valeur ramenée des 180 mensualités à échoir à ce taux débiteur, soit 234 571,26 €.

B

Des calculs similaires nous donnent une mensualité de 1 707,93 CHF, un TAEG de 0,89 % et un capital restant dû après la 60^{e} mensualité de 285 937,58 CHF.

Dans l'hypothèse d'un franc suisse à un euro après les soixante premières mensualaités, l'option vaut 35 937,58 €, elle vaut zéro quand le franc suisse passe à soixante-quinze centimes. On en déduit comme valeur de l'option après paiement des soixante premières mensualités 7 187,52 €, ce qui donne 6 564,42 € à l'origine du prêt en ramenant à un et demi pour mille sur soixante mois et demi.

6.3. Étude d'un prêt à la consommation

La Consumore vous propose un prêt de 10 000 €, remboursable en 60 mensualités constantes à terme échu au taux effectif global de 3,6 %.

Quel est le montant des mensualités si La Consumore ne retient aucun frais sur la somme mise à votre disposition ?

Quel est le rapport entre les montants des mensualités selon que La Consumore retient 100 € de frais sur la somme mise à votre disposition ou qu'elle n'en retient aucun ? En déduire le montant des mensualités si elle en retient 100 €.

En pratique, La Consumore retient 100 € à titre de frais sur la somme mise à votre disposition.

Vous espérez recevoir 6 600 € dans 22 mois. Vous-vous interrogez alors sur la capacité d'une telle somme à éteindre le prêt.

Ω désignera par la suite cette question.

De prime abord, combien de réponses et lesquelles vous semble-il possible que Ω puisse apporter ? pourquoi ?

Pouvez-vous affirmer que la réponse qu'apporte Ω soit vrai ? pourquoi ?

La Consumore vous indique que chaque mensualité comprend des frais, se décomposant, d'une part, en intérêts, d'autre part, pour 5 € en d'autres frais.

Pouvez-vous affirmer que la réponse qu'apporte Ω soit vrai ? pourquoi ?

Vous estimez que les intérêts compris dans chacune des mensualités sont arrêtés en appliquant le même taux d'intérêt sur toute la durée du prêt. Quel serait ce taux d'intérêt ? Combien vous resterait-il à rembourser au bout de 22 mois ? Pourriez-vous affirmer que la réponse qu'apporte Ω soit vrai ? pourquoi ?

La Consumore vous indique qu'après le paiement de la vingt-quatrième mensualité, vous lui devrez 6 287,56 €. Elle vous précise que le taux d'intérêt pour établir les intérêts a une première valeur pour les deux premières années du prêt, et une deuxième valeur pour les trois dernières années.

Ce procédé vous semble-t-il licite ?

Déterminer les deux taux d'intérêt.

Quels sont les avantages du procédé pour La Consumore ? Pouvez-vous affirmer que la réponse qu'apporte Ω soit vrai ? pourquoi ?

Au terme de cette étude, livrez votre appréciation des valeurs que peut prendre Ω.

*

* *

6.4. Deux obligations de même coupon

Les obligations assimilable du Trésor FTAJ et FTAA offrent un coupon annuel de 2,25 % et ont respectivement pour échéance le 25.10.2022 et le 25.10.2024.

Dans tout le problème, on se place au 18.02.2015 où l'on observe un cours en pied de coupon de 115,055 pour FTAJ et de 114,030 pour FTAA.

1) Déterminer le coupon couru et la durée restante de chaque obligation.

2) Donner une estimation du taux de rendement actuariel des deux obligations.

3) Comparer les flux attendus de FTAA si on la regarde dans deux ans à ceux attendus de FTAJ aujourd'hui.

4) Justifier que si dans deux ans le marché des obligations assimilables du Trésor fournit des prix identiques à ceux d'aujourd'hui pour des caractéristiques similaires

alors le prix que l'on peut attendre de FTAA dans deux ans est celui de FTAJ aujourd'hui.

5) Sous l'hypothèse précédente, quel serait le prix aujourd'hui d'une obligation assimilable du Trésor dont la seule tombée attendue serait 100 dans deux ans ?

*

* *

6.5. Un montage financier

Le produit RendementPlus promet un coupon de 5 € chaque début année de 2016 à 2020. Début 2020, la valeur de RendementPlus, après versement du coupon, sera de 120 € si « l'EBITA ajusté par la formule de Moivre de la société VersLes Sommets est supérieur à 85,72 % de sa dette senior pondérée » et de 60 € sinon. Dans la suite du sujet, le premier cas sera dénommé Scénario Favorable, le second, Scénario Défavorable.

Le Livret A, par la suite Livret, rémunère les sommes qui lui sont portées sur la base d'un taux annuel, fixé deux fois par an. Les sommes portent intérêts par quinzaine civile, proportionnellement au taux annuel. Les intérêts de l'année sont crédités en début d'année suivante et ne portent intérêts qu'à partir de ce moment.

1) La formule qui commande la valeur de RendementPlus début 2020 vous est-elle compréhensible ? L'est-elle pour le grand public ?

2) RendementPlus sera proposé à la vente au prix de 100 € fin 2014. Vous souhaitez acheter 100 coupures.

a) Établir les encaissements et décaissements prévus si Scénario Favorable se réalise ; si Scénario Défavorable se réalise.

b) Quel est le taux de rendement effectif annuel de RendementPlus si Scénario Favorable se réalise ? Si Scénario Défavorable se réalise ?

c) 10 000 € sont placés sur Livret fin 2014. Chaque début d'année à partir de 2016, vous prélevez 500 € sur Livret. En supposant que le taux de Livret reste à 1 % jusqu'à fin 2020, de quelle somme disposez-vous sur Livret début 2020 ? Quel est le taux de rendement effectif annuel de cette opération ?

3) Pour acheter les 100 coupures RendementPlus, vous ne disposez que de 4 050 €. Il vous est alors proposé un prêt de 6 000 €, remboursable par mensualités à terme échu sur 5 ans, au taux annuel effectif global de 4 % et qui supporte 50 € de frais de dossier (par la suite Prêt).

a) Quel est le montant de la mensualité ?

b) Quel serait le taux effectif global de PRÊT si les mensualités étaient de 110 € ?

4) Vous voulez acheter 100 coupures RENDEMENTPLUS en faisant appel à PRÊT, les mensualités étant arrêtées à 110 € (MONTAGE).

a) Présenter les encaissements et décaissements associés à MONTAGE selon que ce soit SCÉNARIO FAVORABLE ou SCÉNARIO DÉFAVORABLE qui se réalise.

b) 4 050 € sont placés sur LIVRET fin 2014. A partir de janvier 2015, chaque fin de mois 110 € sont versés. A partir de début 2016, 500 € sont prélevés chaque début d'année. En supposant que le taux de LIVRET reste à 1 % jusqu'à fin 2020, de quelle somme disposez-vous sur LIVRET début 2020 ? Comme intermédiaire, il pourra être calculé la somme disponible sur LIVRET au début de l'année suivant 12 versements de 110 € chaque fin de mois.

5) Dans cette question, il est supposé que SCÉNARIO FAVORABLE est certain.

a) Dans un premier temps, les encaissements et décaissements prévus sont ramenés fin 2014 en utilisant un taux d'escompte de 10 % :

- Quelle est la valeur escomptée des encaissements et décaissements associés à l'achat des 100 coupures RENDEMENTPLUS ?

- Quelle est la valeur escomptée des encaissements et décaissements associés à PRÊT, les mensualités étant arrêtées à 110 € ?

- Quelle est la valeur escomptée des encaissements et décaissements associés à MONTAGE ?

b) Le taux de rendement effectif annuel de MONTAGE est-il inférieur, égal ou supérieur à 10 % ?

6) Dans cette question, il est supposé que SCÉNARIO DÉFAVORABLE est certain.

a) Quel est le cumul des encaissements et décaissements prévus ?

b) Le taux de rendement effectif annuel de MONTAGE est-il positif, nul, ou négatif ?

*

* *

1) Cette formulation n'est guère compréhensible.

2)

b) En utilisant le moteur financier avec une valeur initiale de 100, 5 versements de 5 et une valeur finale à 120 et 60, nous trouvons un taux de rendement de 8,38 % dans le cas favorable et de -0,36 % le cas défavorable.

c) En utilisant le moteur financier avec une valeur initiale de 10 000, 5 versements de 500 et un taux de 1 %, en nous plaçant en mode $BEGIN$, nous obtenons comme valeur finale 7 959,60 €.

3)

a) En utilisant le moteur financier avec une valeur initiale de 5 950, 5 versements, le taux effectif de 3,93… % correspondant au taux nominal de 4,00 % sur une base mensuelle, nous obtenons une mensualité de 109,39 €.

b) En utilisant le moteur financier avec une valeur initiale de 5 950, 5 versements de 110, nous obtenons un taux nominal de 4,16… % correspondant au taux effectif de 4,24 %.

4)

b) Remarquons que le versement de 110 € fin janvier produit dans l'année des intérêts sur 11 mois, soit $110 \cdot 11/12 \cdot 1$ %, celui de fin février sur 10 mois, $110 \cdot 11/12 \cdot 1$ %, … Il s'agit de sommer la suite arithmétique 11, 10, …, qui donne 66. Les intérêts sur l'année pour les versements de l'année sont donc $110 \cdot 66/12 \cdot 1$ %, soit 6,05 €. 12 versements de 110 € en fin de mois sur Livret à partir de janvier donne 1 326,05 € en fin d'année une fois les intérêts crédités.

Prendre une valeur initiale de 4 050 et 5 versements 826,05 donne une valeur finale au taux de 1 % de 8 470,28.

5)

a) Avec la calculatrice, en utilisant le taux nominal de 9,57… % correspondant à 10 % effectif en base mensuel, nous obtenons 5 229,24 €.

b) 6,21 €. Avec la fonction cible du tableur, le taux de rendement est 10,25 %.

6)

a) -2 150 €.

b) Avec la fonction cible du tableur, le taux de rendement est -7,81 %.

6.6. Intérêts inframensuels

La Lambic propose à Benoît de lui prêter vingt mille euros pour l'achat d'une voiture.

Les sommes prêtées portent intérêts à un et demi pour mille par quinzaine.

A

1 –

Arrêter les intérêts au terme de la première quinzaine.

2 – Les intérêts arrêtés au terme de la première quinzaine sont reportés en fin de deuxième quinzaine.

Arrêter les intérêts au terme de la deuxième quinzaine

Déterminer le taux d'intérêt mensuel apprécié sur les deux premières quinzaines.

3 – Les intérêts arrêtés au terme de la première quinzaine portent intérêts pendant la deuxième quinzaine.

Arrêter les intérêts au terme de la deuxième quinzaine et calculer le taux d'intérêt mensuel au terme deux premières quinzaines, suivant que le taux de quinzaine appliqué aux intérêts de première quinzaine est de un et demi pour mille ou de deux pour mille.

Déterminer, dans chacun des cas, le taux d'intérêt mensuel apprécié sur les deux premières quinzaines.

4 –

Calculer le taux mensuel proportionnel à un et demi pour mille par quinzaine.

Calculer le taux mensuel équivalent à un et demi pour mille par quinzaine.

Le prêt est remboursable en soixante mensualités constantes, la première mensualité intervenant un mois et demi après la mise à disposition des fonds, les sommes dues à La Lambic portant intérêts à un et demi pour mille par quinzaine.

B

1 –

Déterminer combien doit Benoît à La Lambic au terme de la première quinzaine.

2 – Si à la fin d'une quinzaine, il n'y a pas paiement d'une mensualité, les intérêts arrêtés de la quinzaine sont reportés en fin de quinzaine suivante.

Estimer le montant de la mensualité.

3 – Si à la fin d'une quinzaine, il n'y a pas paiement d'une mensualité, les intérêts arrêtés de la quinzaine font l'objet d'intérêts à un et demi pour mille la quinzaine suivante.

Estimer le montant de la mensualité.

La Lambic retient un pour cent de la somme prêtée et facture en sus de chaque mensualité dix euros au titre de diverses prestations.

C

1 –

Déterminer la somme effectivement mise à disposition de Benoît.

Justifier la rétention de un pour cent.

Décrire des prestations que pourraient couvrir les dix euro.

2 – Les intérêts arrêtés d'une quinzaine au terme de laquelle La Lambic ne reçoit pas de mensualité sont reportés en fin de quinzaine suivante.

Estimer la somme que paiera Benoît chaque mois.

Estimer le taux effectif annuel global du prêt.

3 – Les intérêts arrêtés d'une quinzaine au terme de laquelle La Lambic ne reçoit pas de mensualité font l'objet d'intérêts à un et demi pour mille la quinzaine suivante.

Estimer la somme que paiera Benoît chaque mois.

Estimer le taux effectif annuel global du prêt.

4 – Les intérêts arrêtés d'une quinzaine au terme de laquelle La Lambic ne reçoit pas de mensualité font l'objet d'intérêts à deux pour mille la quinzaine suivante.

Estimer la somme que paiera Benoît chaque mois.

Estimer le taux annuel effectif global du prêt.

*

*   *

A
1) 30,00 € 2) 60,00 €, 0,3000 % 3) à 1,5 ‰ : 60,05 €, 0,3002 % et à 2 ‰ : 60,06 €, 0,3003 % 4) 0,3000 %, 0,3002 %

B
1) 20 060 €

2) Le capital dû juste avant le début des mensualités est 20 090 €, ce qui donne une mensualité de 365,28 € au taux mensuel de 0,3000 %.

3) Le capital dû juste avant le début des mensualités est 20 090,14 €, ce qui donne une mensualité de 365,30 € au taux mensuel de 0,3002 %.

C
1) 19 800 €

2) La mensualité est de 375,28 €, avec la méthode de la mensualité à échoir, la calculatrice donne un taux annuel nominal de 5,09 %, soit un TAEG de 5,21 %.

3) La mensualité est de 375,30 €, avec la méthode de la mensualité à échoir, la calculatrice donne un taux annuel nominal de 5,09 %, soit un TAEG de 5,21 %.

4) Les intérêts de la troisième quinzaine suivant la mise à disposition des fonds sont de 30 € sur le principal et de 0,18 € sur les 60,06 € d'intérêts des deux premières quinzaines. Le capital dû juste avant le début des mensualités est donc 20 090,18 €, ce qui donne une mensualité de 365,30 € au taux mensuel de 0,3003 %. La mensualité définitive est alors de 375,30 €, avec la méthode de la mensualité à échoir, la calculatrice donne un taux annuel nominal de 5,09 %, soit un TAEG de 5,21 %.

6.7. Défaillance d'un État

La République des braves (RDB) appartient à la zone monétaire des optimistes (ZO). Elle est confrontée à de graves difficultés budgétaires. Vous êtes chargé d'établir des scénarios quant à la solvabilité de la RDB à court terme.

1) Le 12 ans à coupon de 5 % de la RDB côte 60 alors que des titres équivalents des autres états de la ZO coteraient 120.

Quels sont les taux de rendement actuariel du 12 ans, à coupon 5 %, de la RDB et de celui des titres équivalents des autres états de la ZO ?

2) Vous envisagez un scénario avec deux hypothèses : l'un où la RDB fait face à tous ses engagements en restant dans la ZO, l'autre où la RDB fait complètement défaut.

Valoriser le 12 ans de la RDB dans chacune des hypothèses avec un taux d'escompte de 3 %.

En escomptant en moyenne un rendement de 3 %, estimer la probabilité risque neutre de défaut complet.

3) Vous envisagez un scénario où la RDB réduit unilatéralement ses engagements dans une certaine proportion.

Quelle réduction permet d'obtenir un rendement de 3 % avec le 12 ans de la RDB ?

4) Vous envisagez un scénario où la RDB réduit unilatéralement ses engagements de 30 % et où elle sort de la ZO.

En estimant que la nouvelle monnaie garde une parité fixe avec la ZO pendant 12 ans, quel serait le prix aujourd'hui du 12 ans de la RDB qui fournirait un rendement de 3 %, exprimé en monnaie de la ZO ?

En estimant que la nouvelle monnaie se dévalue de 4 % année après année par rapport à la monnaie de la ZO, quel serait le prix aujourd'hui du 12 ans de la RDB qui fournirait un rendement de 3 %, exprimé en monnaie de la ZO ?

*

*   *

1) Avec 12 coupons annuels de 5 à terme échu et 100 de remboursement au terme, le moteur à flux fixe donne pour un prix de 60 un TRA de 11,23 % et pour un prix de 120, un TRA de 2,99 %.

2) Le moteur fournit pour les mêmes flux que précédemment, un prix de 119,91 pour un TRA de 3,00 %. Ce prix est celui à retenir dans l'hypothèse favorable et zéro dans le cas contraire.

En espérance, $60 = (1 - p) \times 119,91 + p \times 0$ où p désigne la probabilité de défaut, ce qui donne p=50,0 %.

3) Une réduction des tombées à venir à hauteur de p donne à l'obligation au prix actuel de 60, un TRA de 3,00 %. En effet, $60 = (1-p) \times 119,91$ et 119,91 représente le prix des des tombées à venir sans réduction au TRA de 3,00 %.

4) Un réduction de 30 % des tombées de l'obligation conduit à considérer 12 coupons annuels de 3,5 à terme échu et 70 de remboursement au terme, en considérant que la nouvelle monnaie est au pair au début.

Ces tombées donnent avec un TRA de 3,00 % un prix de (1-30 %)×119,91, soit 83,94. On retrouve ce prix en utilisant le moteur avec les tombées réduites.

Regardons ce qui se passe si la monnaie des tombées se dévalue chaque année de 4,00 % par rapport à la monnaie pour laquelle le TRA de 3,00 % est exigé aujourd'hui.

Une tombée d'un montant T libellée dans la monnaie qui se déprécie et qui intervient dans t années aura pour contrepartie alors $T \cdot (1 - 0,0400)^t$ dans la monnaie de référence. Ce montant ramené aujourd'hui à 3,00 % donne $T \cdot (1,0300/0,99600)^t$, ce qui correspond à ramener T dans la monnaie qui se déprécie au taux de $1,0300/0,99600 - 1$, soit 7,29 %. Avec ce taux, les tombées considérées ont un prix aujourd'hui de 57,45.

6.8. Emprunt à deux composantes

Un emprunt immobilier comprend deux parties, l'une, pour un montant de 150 k€, est amortissable sur vingt ans par mensualités constantes à terme échu au taux de 3,6 %, l'autre, pour un montant de 100 k€, est amortissable sur quinze ans par trimestrialités constantes à terme échu au taux de 4,2 %.

1) Calculer la mensualité et la trimestrialité.

2) Établir le diagramme des flux.

3) Calculer le montant restant dû après paiement de la première trimestrialité.

4) Aux taux effectifs mensuels de 0,30 % et de 0,35 %, comparer la valeur d'une trimestrialité à échoir dans un trimestre et celle de trois mensualités successives de montant égal au tiers de la trimestrialité intervenant dans deux, trois et quatre mois.

5) En approximant chaque trimestrialité par trois mensualités successives de montant égal au tiers de la trimestrialité intervenant un mois avant la date de la trimestrialité, à la date de la trimestrialité, un mois après la date de la trimestrialité, établir le diagramme des flux et estimer le taux effectif global de l'emprunt.

6) L'emprunt supporte des frais de dossier de 1 000 € et des prélèvements mensuels de 50 € jusqu'à son terme. Estimer le taux effectif global de l'emprunt.

*

* *

1) Avec le moteur financier, on obtient successivement la mensualité et la trimestrialité :

$$\begin{array}{rcl}
20\cdot 12,\ 15\cdot 4 & \rightarrow & N \\
-150\ 000, -100\ 000 & \rightarrow & PV \\
0 & \rightarrow & FV \\
\text{END} & \rightarrow & Beg/End \\
12,\ 4 & \rightarrow & P/YR \\
4{,}2,\ 3{,}6 & \rightarrow & I/YR \\
877{,}67,\ 2\ 254{,}88 & \leftarrow & PMT
\end{array}$$

2) Nous avons la mise à disposition du capital prêté, puis 60 séquences successives de trois mois avec en fin des deux premiers mois, le paiement de la mensualité, et en fin du troisième, le paiement de la mensualité et de la trimestrialité, et, à la suite de ces séquences, le paiement en fin de mois de la mensualité, itéré 60 fois.

3) Le montant restant dû après paiement de la première trimestrialité est égal aux trimestrialités alors à échoir, ramenées au tarif, soit avec le moteur :

$$\begin{array}{rcl}
15{\cdot}4\ \text{-}1 & \rightarrow & N \\
2\ 254{,}88 & \rightarrow & PMT \\
0 & \rightarrow & FV \\
\text{END} & \rightarrow & Beg/End \\
4 & \rightarrow & P/YR \\
3{,}6 & \rightarrow & I/YR \\
-98\ 795{,}12 & \leftarrow & PV
\end{array}$$

4) Au taux effectif mensuel, noté i, la trimestrialité à échoir unitaire dans un trimestre se ramène à $(1+i)^{-3}$ et les mensualités successives de montant égal au tiers de la trimestrialité intervenant dans deux, trois et quatre mois se ramènent en cumulé à $1/3 \cdot (1+i)^{-3} \cdot ((1+i)+1+1/(1+i))$.

L'écart relatif du 2$^{\text{e}}$ montant au 1$^{\text{er}}$ est égal à $1/3 \cdot ((1+i)+1+1/(1+i)) - 1$. Au deuxième ordre, $1/(1+i) = 1 - i + i^2 + o(i^2)$ et donc cet écart relatif est équivalent à $i^2/3$ ce qui pour i égal à 0,30 % ou 0,35 % est inférieur à 10^{-5}.

5) Avec l'approximation demandée, nous avons après la mise à disposition du capital prêté, un mois avec à sa fin le paiement de la mensualité puis, 180 mois avec à leur fin le paiement de la mensualité et du tiers de la trimestrialité et enfin, 59 mois avec à leur fin le paiement de la mensualité.

Le moteur à flux variables de la calculatrice financière permet alors d'estimer le taux mensuel d'équilibre :

$$\begin{array}{rcl}
1 & \rightarrow & P/YR \\
-250\ 000 & \rightarrow & CF_0 \\
877{,}67 & \rightarrow & CF_1 \\
877{,}67 + 2\ 254{,}88/3 & \rightarrow & CF_2 \\
180 & \rightarrow & N_1 \\
877{,}67 & \rightarrow & CF_3 \\
59 & \rightarrow & N_3 \\
0{,}3169 & \leftarrow & IRR/YR
\end{array}$$

Le taux mensuel obtenu 0,3169 % est équivalent à 3,80 % annuel.

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & P/YR \\ -249\,000 & \to & CF_0 \\ 927{,}67 & \to & CF_1 \\ 927{,}67 + 2\,254{,}88/3 & \to & CF_2 \\ 180 & \to & N_2 \\ 927{,}67 & \to & CF_3 \\ 59 & \to & N_3 \\ 0{,}3557 & \leftarrow & IRR/YR \end{array}$$

Le taux mensuel obtenu 0,3557 % est équivalent à 4,27 % annuel.

6.9. Contrat à terme

1.
La République subcontinentale émet régulièrement des obligations en nordals Un marché secondaire existe et aussi des contrats notionnels, les Nordels.

Le Nordel 10 ans à échéance le 1er juillet 2010 a pour vocation de simuler le comportement d'une obligation de la République subcontinentale qui serait émise le 1er juillet 2010 avec un coupon de 5 % et une durée de 10 ans. Trois souches d'obligations ont été retenues pour la livraison de ce Nordel :
RS15, échéance 1er juillet 2019, coupon annuel de 6 % chaque 1er juillet ;
RS17, échéance 1er juillet 2020, coupon annuel de 5 % chaque 1er juillet ;
RS18, échéance 1er juillet 2021, coupon annuel de 4 % chaque 1er juillet.

a) Calculer le prix de RS15, RS17 et RS18 au 1er juillet 2010 au taux de rendement actuariel de 5 %.

b) Ces prix, multipliés par le prix du Nordel, sont ceux retenus pour la livraison du Nordel. Combien devait vous livrer en nominal de titres de RS15, RS17 et RS18 pour dénouer un million de nornals en nominal de Nordel 10 ans à échéance le 1er juillet 2010 ?

2.
Le 26 mai 2010 les cours en pied de coupon de RS15, RS17 et RS18 sont respectivement de 117,80, 110,30 et 101,40 et celui du bon de la République subcontinentale à échéance 1er juillet 2010 qui délivre un coupon annuel de 8 %, 100,58.

a) Calculer les coupons courus de chacune des obligations et du bon.

b) Déterminer le facteur de capitalisation que l'on peut retenir entre le 26 mai 2010 et le 1er juillet 2010 pour les titres de la République subcontinentale.

c) Quels cours anticipez-vous pour RS15, RS17 et RS18 au 1er juillet 2010 ?

3.
Le 26 mai 2010, vous vendez pour un million de nordals en nominal de Nordel 10 ans à échéance le 1er juillet 2010. Parmi les trois souches, laquelle anticipez-vous de livrer ?

*

* *

1) Les prix sont respectivement 107,108, 100,000 et 91,694 et il y aurait à livrer pour 1 000 000 en nominal de Nordel 933 637 en nominal de RS15 ou 1 000 000 en nominal de RS17 ou 1 090 584 en nominal de RS18.

2) Les coupons courus sont respectivement de 5,408, 4,507 et 3,065 ce qui donne des prix pleins de 123,208, 114,807 et 105,005 ce qui projeté du 26 mai au 1er juillet donne 123,447, 115,030 et 105,209 en utilisant comme facteur de capitalisation 1,0019389 en retenant un coupon de 7,211 au 26 mai pour l'obligation de 8,00 % et donc un cours plein de 107,791.

3) On en déduit un Nordel d'équilibre pour RS15 de 115,255, pour RS17 de 115,030 et pour RS18 de 114,739. Ce dernier le plus bas est le cours du Nordel au 26 mai, RS18 est anticipée comme la moins chère à livrer.

6.10. Opération de crédit différé

1. Phase d'épargne

Alain a ouvert auprès de La Bienveillance, il y a 8 ans, un compte d'épargne rémunéré au taux annuel de 2,4 %. Il a effectué un versement initial de 10 000 €, puis a versé en fin de chaque mois 500 €. Les intérêts sont calculés et crédités au compte chaque fin de mois.

a) quel est le capital acquis ?

b) quel aurait été le capital acquis si le taux de rémunération avait été celui du marché, à savoir 3,6 % ?

c) combien Alain a-t-il perdu en acceptant une rémunération moindre de son épargne ?

2. Phase d'emprunt

La Bienveillance propose à Alain un prêt immobilier de 100 000 €, remboursable en 20 ans par mensualités constantes à terme échu, au taux effectif global de 3,6 %.

a) quel est le montant des mensualités ?

b) quel serait le montant du prêt si le taux effectif global était celui du marché, à savoir 4,2 %, avec des mensualités identiques ?

c) combien Alain gagne-t-il avec cette proposition de prêt ?

3. Calcul de taux

a) en considérant que le gain obtenu sur le prêt est un complément de rémunération pour la phase d'épargne, calculer le taux de rendement de la phase d'épargne.

b) en considérant que la perte de rémunération lors de la phase d'épargne vient diminuer le montant du prêt disponible, calculer le taux effectif global de l'emprunt.

*

*   *

1 a) En prenant comme taux de rendement actuariel 2,40 %, on obtient comme capital acquis 64 892,80 €, b) avec 3,60 %, on obtient 68 667,41 €, soit c) une perte 3 774,61 €

2 a) La mensualite est de 582,12 € au TAEG de 3,60 %, b) ellle donnerait 95 056,74 € de capital avec un TAEG de 4,2 %, c) soit un gain de 4 943,26 €

3 a) Le taux de rendement actuariel est de 3,96 %, b) le TAEG est 4,05 %

6.11. Dénouement d'une opération immobilière

La société Les Bâtisseurs a réalisé une opération de réhabilitation immobilière :

- Un ensemble immobilier a été acheté le 01.07.2006 pour 100,0 millions d'euros (M€).

- Des travaux de restructuration ont été réalisés du 01.07.2006 au 31.12.2007 et ont donnés lieu à des décaissements mensuels de 5,0 M€ intervenant en début de mois.

- L'ensemble immobilier devait être vendu le 01.01.2008 au prix de 250,0 M€.

I Analyse a priori

1) Les Bâtisseurs a financé l'opération.

a) Quels sont les flux (dates et montants) qu'attendait Les Bâtisseurs ?

b) Quel était le taux de rendement annuel attendu de l'opération ?

2) Les Bâtisseurs a apporté 80,0 M€ et la banque La Bienveillante a financé le solde au fur et à mesure des besoins au taux mensuel de 0,8 %, les intérêts

se rajoutant mois après mois au capital dû ; il était convenu que la banque soit remboursée le 01.01.2008 :

a) Quel est le montant de la somme qui devait être remboursée le 01.01.2008 ?

b) Quels sont les flux (dates et montants) qu'attendait LES BÂTISSEURS ?

c) Quel devait être le taux de rendement annuel de l'opération pour LES BÂTISSEURS ?

II Analyse au 01.01.2008

LES BÂTISSEURS ne trouve pas preneur pour l'ensemble immobilier au prix de 250,0 M€. La société envisage deux solutions : vendre immédiatement au prix de 150,0 M€ ou louer l'ensemble pendant 5 ans au prix de 1,0 M€ par mois payable d'avance et vendre l'ensemble le 01.01.2013 à un prix de 200,0 M€, selon ses estimations.

1) Quels sont les flux (dates et montants) qu'attend LES BÂTISSEURS si la deuxième solution est retenue ?

2) Combien valent ces flux escomptés au taux annuel de 15 % ?

3) Quelle est la meilleure solution lorsque LES BÂTISSEURS ont financé l'opération et que cette société attend un rendement de ses investissements d'au moins 15 % par an ?

4) Quelle est la meilleure solution lorsque LES BÂTISSEURS a utilisé le concours de LA BIENVEILLANTE, que ce concours a été remboursé le 01.01.2008 et que LES BÂTISSEURS attend un rendement de ses investissements d'au moins 15 % par an ?

5) LA BIENVEILLANTE, qui avait participé au financement de l'opération, propose de prolonger son concours en portant le taux mensuel à 1 % à partir du 01.01.2013, les loyers lui étant reversés et le remboursement de son concours étant reporté au 01.01.2013.

a) À quels flux (dates et montants) peut s'attendre LES BÂTISSEURS ?

b) Combien valent ces flux escomptés au taux annuel de 15 % ?

c) Si LES BÂTISSEURS attend un rendement de ses montages d'au moins 15 % par an, doit-elle accepter l'offre de LA BIENVEILLANTE ?

Nota : les montants seront calculés avec une précision d'un dixième de M€ et les taux d'intérêt annuel avec une précision de 0,1 %.

*

*   *

I 1 b) Le taux de rendement attendu est 26,0 %.

I 2 a) Les Bâtisseurs ont 120,2 M€ à rembourser et b) le taux de rendement est alors 38,0 %.

II 2 Les flux se ramènent à 142,9 M€ à 15,0 %, ce qui est inférieur à 150,0 M€, il vaut mieux vendre tout de suite.

II 5 La somme à rembourser dans 5 ans est 136,0 M€, ce qui fait un flux net de 64,0 M€ qui ramené à 15,0 % sur cinq ans donne 31,8 M€ qui est supérieur au montant obtenu après vente immédiate, 29,8 M€. Il vaut mieux demander la poursuite du concours de La Bienveillante.

6.12. Risque de défaillance d'un emprunteur

1) On suppose que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient avec une probabilité instantanée constante dans le temps, notée μ. Démonter qu'il existe, pour tous les prêts de taux i, un taux j qui ne dépend que de i et de μ tel que pour chaque prêt, à toute époque, la valeur probable des remboursements à échoir au taux j soit égale au capital restant dû. Établir la relation entre i, j et μ.

2) Pour des prêts de quinze ans, remboursables par mensualités constantes à terme échu, la proportion p_0 cumulée attendue d'emprunteurs qui deviendront défaillants est de 5,00 %. On suppose que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient avec une probabilité instantanée constante dans le temps, notée μ_0. Déterminer μ_0. Sachant que le banquier attend un rendement j_0 de 7,00 % sur ces prêts, quelle mensualité doit-il demander pour un capital K de 200 000 € ? Quel complément de capital aurait-il prêté si le risque de défaillance était nul ?

3) Le banquier utilise un TEG t de 7,65 % pour ses prêts de quinze ans, remboursables par mensualités constantes à terme échu.

a) Quelle est la valeur actuelle probable des mensualités d'un tel prêt de capital K égal à 200 000 €, au taux j_0 de 7,00 %, en supposant que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient selon les hypothèses de la question 2) ?

b) Pour un tel prêt, avec le TEG t de 7,65 %, à quelle proportion mensuelle p_1 constante de passage à l'état d'insolvabilité le banquier peut-il faire face sous la contrainte d'une rentabilité j_0 de 7,00 % ?

4) Un prêt de K égal à 200 000 € présente les caractéristiques du 3). On se place un an après la date d'effet du prêt, l'emprunteur n'étant pas défaillant.

a) Quelle est la valeur capitalisée au taux j_0 de 7,00 % des flux intervenus entre le banquier et l'emprunteur ?

b) Quel est le capital restant dû par l'emprunteur ?

Le prêt comporte une clause de remboursement anticipé sans pénalité. Quel résultat, pour l'année écoulée, vous semble-t-il raisonnable d'enregistrer si la clause de remboursement anticipé est exercée ?

c) Quelle est la valeur actuelle probable des mensualités à échoir, au taux j_0 de 7,00 %, en supposant que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient selon les hypothèses du 3) b ?

Quel résultat, pour l'année écoulée, vous semble-t-il raisonnable d'enregistrer ?

d) Quelle est la valeur actuelle probable des mensualités à échoir, au taux j_0 de 7,00 %, en supposant que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient selon les hypothèses de la question 2) ?

Quel résultat, pour l'année écoulée, vous semble-t-il raisonnable d'enregistrer ?

e) Le banquier estime que, dorénavant, le risque p_1 cumulé que l'emprunteur soit défaillant avant la fin du prêt est de 10,00 %. Quelle est la valeur actuelle probable des mensualités à échoir, au taux j_0 de 7,00 %, en supposant que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient avec une probabilité instantanée constante dans le temps ?

Quel résultat, pour l'année écoulée, vous semble-t-il raisonnable d'enregistrer ?

*

* *

1) Lorsque un événement « rare » intervient sur une population avec une intensité uniforme μ, la proportion indemne après une durée t écoulée est $\exp(-\mu t)$ en moyenne.

En effet, avec cette loi, pour une période de durée Δ, la proportion de la population affectée en moyenne sera de $1 - \exp(-\mu\Delta)$ qui, pour Δ infinitésimal, est équivalent à $\mu\Delta$, ce qui, rapporté à la durée considérée, donne μ.

Considérons à une date t_0 le capital restant dû d'un emprunt, noté R_{t_0}. Ce capital est égal à l'escompte des remboursements à échoir au taux i de tarification des intérêts de l'emprunt :

$R_{t_0} = \sum_{k=1}^{n} m_k(1+i)^{-(t_k - t_0)}$, où m_k désigne le k^{e} remboursement parmi n intervenant en t_k.

Si nous ramenons maintenant les tombées que la banque peut espérer, il convient de pondérer chacun des remboursements par sa probabilité d'être servi, sachant que l'emprunteur n'est pas défaillant en t_0, qui, pour le remboursement intervenant en t_k, est égale à $\exp(-\mu(t_k - t_0))$.

Pour obtenir à nouveau le capital restant dû, il convient d'utiliser comme facteur d'escompte sur les remboursements ainsi pondérés, le produit du facteur d'escompte $1/(1+i)$ par $\exp(-\mu)$. Ce nouveau facteur d'escompte s'exprime par $1/(1+j)$ où j est le taux utilisé. On a donc, $(1+j) = (1+i)exp(\mu)$.

2) $\exp(-15\mu_0) = 0,950$, d'où $\mu_0 = -\ln(0,950)/15$, soit 0,342 %.

Attendre un rendement de 7,00 % sur ses prêts pour le banquier, signifie que les tombées qu'il attends, ramenées à ce taux, lui donne le capital prêté. Avec la relation établie plus haut, le tarif des prêts est égal à $1,070 \cdot \exp(0,00342) - 1 = 7,37$ % annuel. Ce taux a pour équivalent mensuel 0,594 % dont le taux proportionnel annuel est 7,13 %.

En renseignant 7,13 au registre I/YR, en posant 12 dans P/YR, le moteur financier donne une mensualité à terme échu de 1 812,10 € pour 200 000 € de capital remboursé sur 15 ans, soit en 180 termes.

Ces mensualités ramenées à 7,00 % annuel, soit en mensuel à 0,565 %, proportionnel à 6,78% annuel, taux qui appelle 6,78 au registre I/YR avec 12 dans P/YR %, donneraient 204 330,19 € si le risque de défaillance était nul, soit un surplus de capital de 4 330,19 €.

3) a) Ici donc, le taux équilibre mensuel est $(1 + 7,65\ \%)^{1/12} - 1 = 0,616$ %, ce qui conduit à affecter 7,39 au registre I/YR de la calculatrice financière, si l'on pose 12 dans P/YR, ce qui donne des mensualités de 1 842,02 €.

Leur valeur ramenée à 7,00 %, en supposant que l'état d'insolvabilité d'un emprunteur survient avec une probabilité instantanée de 0,342 %, est égale à leur valeur ramenée au taux annuel de $1,070 \cdot \exp(-0,342) - 1$, soit 7,37 %.

Ce taux annuel est équivalent à 0,594 % mensuel, qui est lui même proportionnel à 7,13 % annuel, taux qu'il faut servir au registre I/YR de la calculatrice financière, toujours avec 12 dans P/YR.

On obtient alors, la valeur ramenée demandée, 203 302,04 €, soit un surplus de 3 302,04 € par rapport à la somme prêtée.

Si la banque estime que les charges auxquelles elle est exposée se facturent à 7,00 % effectif des encours, ce surplus s'enregistre comme le résultat du prêt. Cet enregistrement peut être concomitant à la délivrance du prêt ou étalé sur son déroulé, ce qui est préférable en termes de prudence.

b) En adaptant la relation établie en 1), nous obtenons $1,0700^{1/12}/(1-p_1) = 1,0765^{1/12}$, soit $p_1 = 0,0509$ %.

4) a) Le taux nominal correspondant à 7,00 % effectif est 6,78 % en annuel sur base mensuel. Avec le moteur financier :

$$\begin{array}{rcl} -200\ 000 & \rightarrow & PV \\ 6{,}78 & \rightarrow & I/YR \\ 1\ 842{,}02 & \rightarrow & PMT \\ 12 & \rightarrow & N \\ \text{END} & \rightarrow & Beg/End \\ 12 & \rightarrow & P/YR \\ 191\ 195{,}25 & \leftarrow & FV \end{array}$$

La valeur demandée est 191 195,25 €.

b) Après paiement de la 12^{e} mensualité, il reste à payer $15 \cdot 12 - 12$ mensualités à l'emprunteur non défaillant dont la valeur ramenée à 7,65 % est 192 431,05 €.

c) Par construction escompter à 7,00 % avec un taux de défaillance qui donne un tarif de 7,65 % revient à escompter à ce dernier taux. Ainsi à tout instant la valeur actuelle probable des mensualités à échoir au taux de 7,00 % est le capital restant dû du prêt et le résultat attendu est zéro.

d) Pour avoir un rendement de 7,00 % avec un risque de défaillance cumulé de 10,00 % sur les 14 ans qui reste à courir, il faut escompter à 7,81 %. Les mensualités à échoir valent à ce taux 190 784,84 € et la banque doit enregistrer une perte potentielle pour toute l'aggravation de 1 646,21 €

6.13. Un cas réel

Une prestation est versée, pour un montant atteint, immédiatement. Le versement se poursuit année après année en appliquant un taux de maintien annuel. La prestation fait l'objet d'une revalorisation annuelle obtenue en rapportant le taux garanti au taux du tarif.

Ces prestations forment la garantie principale.

Le taux garanti au tarif est le taux du tarif.

Le calcul des prestations à venir peut être mené avec tout taux d'escompte.

Le tableau qui suit présente les résultats pour un montant atteint de la prestation de 1 et un taux de maintien annuel de 0,970.

Taux garanti	Taux du tarif	4,5 %	4,5 %
Taux d'escompte	Taux du tarif	Taux du tarif	2,5 %
Taux du tarif	**A**	**B**	**C**
2,0 %	21,40	39,89	33,83
2,5 %	19,64	29,41	29,41
3,5 %	16,92	19,61	23,46
4,5 %	14,93	14,93	19,64

Avec comme taux d'escompte et taux garanti, le taux du tarif, on obtient la provision au tarif. C'est le calcul de la colonne A.

Avec un taux garanti à 4,5 %, le calcul est mené au taux du tarif en colonne B. C'est la provision au tarif, en tenant compte du taux garanti de 4,5 %.

Avec un taux garanti à 4,5 %, le calcul est mené à un taux de référence en colonne C. C'est la provision qu'exige le taux de référence, en tenant compte du taux garanti de 4,5 %.

Pendant le différé :
- La garantie principale ne joue pas ;
- La garantie principale fait l'objet chaque année d'une revalorisation à un taux garanti ;
- Au titre d'une garantie secondaire, une autre prestation est versée continûment. Son taux de service annuel est fixe. Le service de cette prestation réduit continûment la garantie principale, le taux annuel de cette réduction étant le même que le taux de service.

À tout moment du différé, le montant servi au titre de la garantie secondaire est égal au montant à ce moment de la garantie principale, arrêté au tarif.

Au début du différé, fixé à 10 ans, la garantie principale est arrêtée à 100 au tarif. Pendant le différé, le taux de revalorisation garanti est de 2,0 %, le taux de service est pris à 1,0 % et on retient un taux d'escompte de 2,0 %.

Taux garanti	Taux du tarif	4,5 %	4,5 %
Taux d'escompte	Taux du tarif	Taux du tarif	2,5 %
Taux du tarif	**A**	**B**	**C**
2,0 %	100,00	195,55	164,20
2,5 %	100,00	155,06	155,06
3,5 %	100,00	117,53	142,74
4,5 %	100,00	100,00	134,82

*

* *

Phase de service

Valoriser en rapportant le taux garanti, g, au taux du tarif, i, conduit à multiplier, année après année, le niveau de la prestation par $(1+g)/(1+i)$. De même, le taux de maintien annuel, m, affecte le volume des prestations chaque année.

Ainsi, pour un niveau de prestations atteint de P, le niveau attendu des prestations n années plus tard, P_n, sera $P(m(1+g)/(1+i))^n$. Escompter ces niveaux de prestations au taux j revient alors à escompter le niveau de prestations initial au taux $(1+j)(1+i)/m(1+g)-1$.

Comme la valeur escomptée d'une rente perpétuelle à terme échu d'arrérages unitaires est l'inverse du taux d'escompte, la valeur ramenée des prestations à venir est $P(1+1/((1+j)(1+i)/m(1+g)-1))$, avec les notations qui précèdent.

Différé

Pendant le différé, t années [1] après son début, le niveau nominal de la garantie principale au taux du tarif s'établit à $100 \cdot 1,020^t$.

Comme le service de la garantie secondaire réduit continûment la garantie principale à hauteur de 1,00 % annuel, on ne peut escompter pour la garantie principale au taux du tarif qu'un montant $100 \cdot (0,990 \cdot 1,020)^t$ à la date t.

Par ailleurs, un taux de service annuel de 1,00 % signifie un taux de service instantané μ égal à $-\ln(0,990)$ qui fournit à la date t un taux cumulé de maintien $\exp(-\mu t)$, qui vaut $0,990^t$.

1. t peut être non entier

L'escompte à 2,00 % de la garantie secondaire sur tout le différé d'une durée de 10 ans donne alors :

$$\int_0^{10} \mu \cdot 100 \cdot (0,970 \cdot 1,020)^t \cdot (1,02)^{-t} \mathrm{d}t$$

Soit, en simplifiant : $100 \cdot \int_0^{10} \mu \exp(-\mu t) \mathrm{d}t$, avec μ défini comme précédemment et donc la valeur ramenée de la garantie secondaire est $100 \cdot (1 - \exp(-10\mu)) = 100 \cdot (1 - 0,990^{10})$.

Revenons à la garantie principale. Celle-ci est différée de 10 ans pendant lesquels jouent la revalorisation annuelle de 2,0 % et la réduction annuelle de 1,0 %. Au terme du différé, la garantie principale s'établit donc à $100 \cdot 0,990^{10} \cdot 1,02^{10}$, ce qui ramené à 2,0 % donne aujourd'hui $100 \cdot 0,990^{10}$.

Reste à provisionner la garantie principale ainsi arrêtée au terme du différé.

Lorsque celle-ci est provisionnée au pair, ce qui est le cas quand le taux de revalorisation garanti pendant le service de la garantie principale est le taux du tarif de cette garantie, l'ensemble des garanties vaut le pair.

6.14. Étude d'un portefeuille de prêts

La Licorne a délivré le premier juin deux mille douze, quatre mille prêts à la consommation de cinq mille euros, remboursables en trente-six mensualités constantes, à terme échu,

Pendant toute la durée des prêts, La Licorne facture chaque mois des intérêts arrêtés à cinq pour mille du capital restant dû, Lors de la délivrance des prêts, elle a facturé, à chacun d'eux, quinze euros de frais de dossier.

1.

a) quel est le montant des mensualités ?

b) quel est le taux effectif global des prêts ?

c) pour chacun des prêt, quel est le capital restant dû après sa délivrance, après le paiement de la douzième mensualité, de la vingt-quatrième et de la trente-sixième ?

La Licorne estime que chaque mois deux nouveaux emprunteurs parmi les quatre mille ne sera plus en état de rembourser son prêt et qu'aucun emprunteur ne remboursera par anticipation son prêt.

2.

a) selon La Licorne, combien d'emprunteurs verseront leur douzième mensualité ? leur vingt-quatrième ? leur trente-sixième ?

b) selon La Licorne, quel est le nombre moyen de mensualités qu'elle recevra chaque mois pendant la période s'écoulant juste après le versement du prêt et le versement de la douzième mensualité ? pendant la période s'écoulant juste après le versement des douzièmes mensualités et le versement des vingt-quatrièmes mensualités ? après le versement des vingt-quatrièmes mensualités et le versement des trente-sixièmes mensualités ? '

c) quel est le montant mensuel moyen que La Licorne s'attend à encaisser pendant la période s'écoulant juste après le versement du prêt et le versement de la douzième mensualité ? pendant la période s'écoulant juste après le versement des douzièmes mensualités et le versement des vingt-quatrièmes mensualités ? après le versement des vingt-quatrièmes mensualités et le versement des trente-sixièmes mensualités ?

d) estimer le taux de rendement actuariel qu'escompte La Licorne de ce portefeuille de prêts.

e) cette estimation est-elle par excès ou par défaut ?

La valeur ramenée à un taux mensuel fixe, d'une mensualité à terme échu, dont les termes sont en progression arithmétique de raison un et commençant par un, est égale à la différence, divisée par le taux mensuel, entre la mensualité d'avance, de terme constant un et ayant le même nombre de termes, et de la valeur ramenée d'un terme d'un montant égal au nombre de termes de la mensualité et intervenant au moment du versement de la dernière mensualité de la mensualité d'origine.

3.

a) calculer la valeur ramenée des sommes attendues par La Licorne, en utilisant l'estimation du 2 d).

b) cette estimation est-elle par excès ou par défaut ?

*

* *

1) a) 152,11 € b) 6,38 % c) respectivement 3 432,04 €, 1 767,36 € et 0,00 €

2) a) respectivement 3978, 3954 et 3930 personnes b) respectivement 3989, 3966 et 3942 personnes en moyenne c) respectivement 606 766,79 €, 603 268,26 € et 599 617,62 € en moyenne

d) En utilsant le moteur à flux variable on obtient un approché du taux de rendement à 5,79 % e) Cette estimation est par excès puisqu'en moyennanant on a déplacé des sommes du plus près au plus loin

$$\begin{array}{rcl}
1 & \to & P/YR \\
-19\ 940\ 000 & \to & CF_0 \\
606\ 766{,}79 & \to & CF_1 \\
12 & \to & N_1 \\
603\ 268{,}26 & \to & CF_2 \\
12 & \to & N_2 \\
599\ 617{,}62 & \to & CF_3 \\
12 & \to & N_3 \\
0{,}4669 & \leftarrow & IRR/YR
\end{array}$$

Le taux mensuel obtenu, 0,4669 %, est équivalent à 5,79 % annuel.

e) La valeur de la serie arithmétique de 36 termes commençcant par 1 et de raison 1 ramenée à 0,4669 % mensuel vaut 561,64. On en déduit la valeur des flux pour la banque, −2 694,67 €, le taux est bien par excès. En utiliisant le solver du tableur on obtint un rendement de 5,78 % pour la banque.

APPENDICE

Soit $\alpha > 0$, on définit la fonction f_α sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ ainsi :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-(1+x)^{-\alpha}}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le lecteur vérifiera la continuité de f_α en 0 et l'existence d'une limite à $\dfrac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0 qui rend f_α dérivable en 0.

Au vu de ce résultat, le lecteur persévérant pourra induire qu'elle pourrait prendre sa dérivée d'ordre n en 0 et par récurrence valider sa conjecture ou, plus simplement, développera $(1+x)^{-\alpha}$ sous forme d'une série entière admettant 1 comme rayon de convergence.

En x différent de 0, f_α est C^∞. En particulier, la dérivée est égale à :

$$\frac{\alpha x(1+x)^{-\alpha-1} - 1}{x^2}.$$

Étudions le numérateur pour connaître son signe.

Sa dérivée est égale à :

$\alpha(1+x)^{-\alpha-2}(1+x-(\alpha+1)x)$, de même signe que $1-\alpha x$.

$f_\alpha^{(1)}$ est donc maximale pour $x = 1/\alpha$ où elle vaut $\alpha^2((1+1/\alpha)^{-\alpha-1} - 1)$ qui est strictement négatif ; $f_\alpha^{(1)}$ est donc strictement négative et f_α strictement décroissante.

Ce résultat est un cas particulier du principe général qui veux que lorsque les débours viennent après les concours, l'équation de l'annexe au décret n° 2002-927 admet une et une seule solution :

$$\sum_{K=1}^{m} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{K'=1}^{m'} \frac{A_{K'}}{(1+i)^{t_{K'}}}$$

On réarrange les K et les K' de sorte que les suites t_K et les $t_{K'}$ soient croissantes.

Dans le cas évoqué, tous les A_K et les $A_{K'}$ sont strictement positifs et $\forall K, K'$, on a $t_K < t_{K'}$.

Par translation de l'échelle temporelle, on place l'origine du temps strictement entre t_{K_m} et $t_{K'_1}$.

Le membre de gauche est alors strictement croissant sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ et celui de droite strictement décroissant.

Lorsque x tend vers -1^+, le membre de droite tend vers 0 et celui de gauche vers $+\infty$ et quand lorsque x tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $+\infty$ et celui de gauche vers 0.

L'équation admet donc une et une seule solution.

L'annexe au décret n° 2002-927 présentait différemment l'équation de base :

$$\sum_{K=1}^{m} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{K'=1}^{m'} \frac{A_{K'}}{(1+i)^{t_{K'}}}$$

K est le numéro d'ordre d'un prêt ;
K' est le numéro d'ordre d'un remboursement ou d'un paiement de charge ;
A_K est le montant du prêt n° K ;
$A_{K'}$ est le montant du remboursement ou du paiement de charge n° K' ;
$\sum$ est le signe indiquant une somme ;
m est le numéro d'ordre du dernier prêt ;
m' est le numéro d'ordre du dernier remboursement ou du dernier paiement de charge ;
t_K est l'intervalle, exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prêt n° 1 et celle du prêt n° K ;
$t_{K'}$ est l'intervalle, exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prêt n° 1 et celle du remboursement ou paiement de charge n° K' ;
i est le taux effectif global.

LA FORMULE DE BLACK AND SCHOLES

Le modèle Cox-Ross-Rubinstein

Considérons un marché financier très simple qui comporte 2 actifs : un actif risqué, dont la valeur est notée S_t sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué, dont la valeur est notée S_t^0.

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979 de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

– Pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T, $\mathbb{T} = \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé, la valeur $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T} \setminus \{n\delta t\}$ est S_t, alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < u$. Donc $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ évolue sur un arbre binaire qui, à tout instant $t = i\delta t \in \mathbb{T}$, présente $i + 1$ valeurs possibles égales à : $\{S_0 u^j d^{i-j}, j = 0, \ldots, i\}$, l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = i\delta t$. j est le nombre de hausses, l'ordre des hausses et des baisses n'important pas.

– Pour la même suite d'instants $\mathbb{T}$, l'actif non risqué vaut $S_0^0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $S_t^0 = S_{t-\delta t}^0 e^{r\delta t}$, soit $S_t^0 = e^{rt}$, où r désigne le taux instantané d'escompte monétaire que l'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ et de prix d'exercice K. Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif S_t à la date T au prix

K. La valeur de cette option à l'instant final est donc $C_T = (S_T - K)^+$ qui vaut 0 si $S_n \leqslant K$ et $S_n - K$ sinon. C'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0 u^j d^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \dots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer le prix du call à l'instant initial, nous allons reprendre les méthodes vues sur les arbres binaires, qui consistent à prendre comme valeur de l'option la valeur du portefeuille répliquant. Comme alors, nous chercherons à définir le portefeuille répliquant par une relation de récurrence rétrograde de manière à lier les inconnues Π_0, α_0 et β_0, prix initial et composition initiale, à la donnée de son paiement à l'échéance $(S_T - K)^+$.

Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué C_t^0. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$, « la veille », lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous la notons $\alpha_{t-\delta t}$ et $\beta_{t-\delta t}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\delta\Pi_t &= \Pi_t - \Pi_{t-\delta t}\\ &= (S_t\alpha_{t-\delta t} + S_t^0\beta_{t-\delta t}) - (S_{t-\delta t}\alpha_{t-\delta t} + S_{t-\delta t}^0\beta_{t-\delta t})\\ &= \delta S_t\alpha_{t-\delta t} + \delta S_t^0\beta_{t-\delta t},\end{aligned}$$

où $\delta S_t = S_t - S_{t-\delta t}$ et $\delta S_t^0 = S_t^0 - S_{t-\delta t}^0$.

On peut alors recomposer le portefeuille, ayant pris connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra s'autofinancer, c'est-à-dire que le changement de composition intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, en vérifiant la relation :

$$\alpha_{t-\delta t}S_t + \beta_{t-\delta t}S_t^0 = \Pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t S_t^0$$

On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par $\Pi = \alpha_{t-\delta t}S_t + \beta_{t-\delta t}S_t^0$ celle correspondante du portefeuille et par S^0 celle de S_t^0. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le « lendemain » Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (α, β) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha S u + \beta S^0 e^{r\delta t} = \Pi^u \\ \alpha S d + \beta S^0 e^{r\delta t} = \Pi^d \end{cases}$$

qui a comme solution :

$$\alpha = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{S(u-d)} \quad \text{et} \quad \beta = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{S^0(u-d)}.$$

Remarquons que l'on peut réécrire Π comme une fonction de Π_u et de Π_d, sous la forme : $\Pi = e^{-r\delta t}(q\Pi_u + (1-q)\Pi_d)$, avec $q = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d}$.

On pose alors $\alpha_t = \alpha$ et $\beta_t = \beta$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t S_t^0$. Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition : *Dans un marché financier $(S_t, S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\phi(S_T)$ est duplicable, c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs $S_0 u$ et $S_0 d$ à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacune les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles répliquants $\Pi_{\delta t}^u$ et $\Pi_{\delta t}^d$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 et donc C_0 comme dans un modèle à une étape. $\square$

Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Quand on réécrit Π comme une fonction de Π_u et de Π_d, sous la forme : $\Pi = e^{-r\delta t}(q\Pi_u + (1-q)\Pi_d)$, avec $q = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d}$, on remarque que $q \in]0,1[$ si et seulement si $d < e^{r\delta t} < u$.

Quand cette condition est vérifiée, Π_u et Π_d sont les deux valeurs que peut prendre une variable aléatoire de Bernoulli Π avec $\mathbb{P}[\Pi = \Pi_u] = q$ et $\mathbb{P}[\Pi = \Pi_d] = 1-q$. Notre équation affirme simplement que Π est précisément le produit par le facteur d'actualisation, $e^{r\delta t}$, de l'espérance de cette variable aléatoire, c'est-à-dire l'espérance actualisée.

En remplaçant S par $S_{t-\delta t}$ dans $S = e^{r\delta t}(qSu + (1-q)Sd)$, on obtient $S_{t-\delta t} = e^{r\delta t}\mathbb{E}[S_t \mid S_{t-\delta t}]$.

On appelle probabilité risque-neutre la probabilité que nous avons définie et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent, S_t, d'une structure de marche aléatoire, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $i+1$ valeurs, $\{S_0 u^j d^{i-j}, j = 0, \ldots, i\}$ que peut prendre S_t sont les $i+1$ valeurs possibles d'une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}[S_t = S_0 u^j d^{i-j}] = \binom{i}{j} q^j (1-q)^{i-j}.$$

En effet, la valeur $S_0 u^j d^{i-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j hausses et $i-j$ baisses dont la probabilité est $q^j(1-q)^{i-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements sont indépendants. Il est facile de voir qu'il y a exactement $\binom{i}{j}$ trajectoires qui atteignent cette valeur.

Proposition : *Dans un marché financier $(S_t, S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \phi(S_T))$ est donné par :*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\phi(S_T)) = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \phi(S_0 u^j d^{n-j})$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité risque-neutre, de sa fonction de paiement.

Démonstration. — Pour $n = 1$, nous avons vu précédemment que $\Pi = e^{-r\delta t}(q\Pi_u + (1-q)\Pi_d)$ où Π est la valeur du portefeuille répliquant en $t = 0$, la proposition est vraie.

Supposons que la proposition soit vraie pour $n-1$, nous avons encore $\Pi = e^{-r\delta t}(q\Pi_u + (1-q)\Pi_d)$. On applique l'hypothèse de récurrence à Π_u et à Π_d et on obtient :

$$\begin{aligned}\Pi = e^{-r\delta t} e^{-r(T-\delta t)} \Bigg(& q \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} q^j (1-q)^{n-1-j} \phi(S_0 u u^j d^{n-1-j}) \\ & + (1-q) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} q^j (1-q)^{n-1-j} \phi(S_0 d u^j d^{n-1-j}) \Bigg).\end{aligned}$$

Le terme $\phi(S_0 u^n)$ ne se retrouve qu'à gauche de la somme avec une pondération q^n et le terme $\phi(S_0 d^n)$ ne se retrouve qu'à droite avec $(1-q)^n$. Le terme $\phi(S_0 u^j d^{n-j})$ se retrouve à gauche avec une pondération $\binom{n-1}{j-1} q^j (1-q)^{n-j}$ et à droite avec $\binom{n-1}{j} q^j (1-q)^{n-j}$. Comme $\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} = \binom{n}{j}$, la proposition est démontrée pour n. □

Applications : Pour un **call** européen :

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$$

Pour un **put** européen :

$$P_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} (K - S_0 u^j d^{n-j})^+$$

Passage à la limite, formule de Black-Scholes

Le but est d'approcher un modèle à temps continu en faisant tendre n vers l'infini sur l'intervalle $[0, T]$.

Fixons les paramètres pour n : $u_n = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$, $d_n = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$, où $\sigma > 0$. En posant $q_n = \frac{e^{rT/n} - d_n}{u_n - d_n}$, nous avons $q_n \in]0,1[$ pour n assez grand.

Soit Z_n une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et $+1$ avec les probabilités $1 - q_n$ et q_n. Pour une suite de variables $Z_{i,n}$ indépendantes, on a :

$$\ln(S_T^n / S_0) = \sum_{i=1}^{n} \sigma\sqrt{T/n} Z_{i,n} = \sigma\sqrt{T} \tilde{Z}_{n,n} \quad \text{où} \quad \tilde{Z}_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_{i,n}$$

Soit $\eta_n = \lceil \frac{\ln(K/S_0 d_n^n)}{\ln(u_n/d_n)} \rceil$ le nombre minimum de hausses pour que l'option s'active. On a $\eta_n = \lceil \frac{\ln(K/S_0)}{\ln(u_n/d_n)} + \frac{n}{2} \rceil$.

En notant $B(n, \eta_n; q_n) = \sum_{j=\eta_n}^{n} \binom{n}{j} q_n^j (1-q_n)^{n-j}$, la valeur du call est :

$$C_0^n = S_0 B(n, \eta_n; \frac{q_n u_n}{e^{rT/n}}) - K e^{-rT} B(n, \eta_n; q_n)$$

Lemme : *Soit $(X_{k,n})$ une suite de Bernoulli de paramètre π_n, alors $\frac{\sum X_{k,n} - n\pi_n}{\sqrt{n\pi_n(1-\pi_n)}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.*

Démonstration. — Soit $Y_{j,n} = \frac{X_{j,n} - n\pi_n}{\sqrt{n\pi_n(1-\pi_n)}}$. La fonction caractéristique $\Phi_{\sum Y_n}(t) = \Phi_{Y_1}(t)^n$. Comme $\mathbb{E}[Y_j] = 0$ et $\mathbb{E}[Y_j^2] = 1/n$, alors $\Phi_{Y_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \Phi_{\sum Y_n}(t) = e^{-t^2/2}$. □

Par calcul de développement limité : $\eta_n = \frac{n}{2} + \sqrt{n}\frac{\ln(K/S_0)}{2\sigma\sqrt{T}} + o(\sqrt{n})$ et $nq_n = \frac{n}{2} + \sqrt{n}\frac{(r - \sigma^2/2)T}{2\sigma\sqrt{T}} + o(\sqrt{n})$.

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\eta_n - nq_n}{\sqrt{nq_n(1-q_n)}} = \frac{\ln(K/S_0) - (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} B(n,\eta_n;q_n) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

où $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$.

Limite du prix Cox, Ross et Rubinstein

Désignons par Z une variable prenant -1 et $+1$ avec probabilités $1-q_n$ et q_n.

$$S_T^n = S_0 \prod_{i=1}^{n} e^{Z_i\sigma\sqrt{T/n}} = S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\tilde{Z}_n}$$

Si $f(z) = (K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z})^+$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T^n)^+) = \lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n))$$

Lemme : *La suite* $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ *converge en loi vers* $\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \tilde{Z}$, *où* $\tilde{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Pour prouver cela, on utilise la fonction génératrice des moments $M_{\tilde{Z}_n}(\tau) = M_Z^n(\tau/\sqrt{n})$. Comme $M_Z(u) = (1-q_n)e^{-u} + q_n e^u$, en utilisant les développements limités de q_n et de l'exponentielle :

$$M_Z\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\tau\sqrt{T}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$M_Z^n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)$$

On retrouve bien la fonction génératrice d'une loi normale de moyenne $\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ et de variance 1.